LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: FASTA TILLSTÅNDETS FYSIK 2002-08-23 (MTF064)
Lösningsförslag

---

1. (a) No, wavelength to long compared to distance atom–atom.
   (b) i. Semiconductor.
      ii. Metal.
      iii. Semiconductor, ϵ_F in band gap.
      iv. Metal.
      v. Semiconductor.
      vi. Semiconductor.
      vii. Metal.
      viii. Semiconductor.
      ix. Metal.

2. Ett material där den primitiva enhetscellen inehåller p stycken atomer har 3 akustiska grenar och $3p-3$ optiska grenar. Vid små K ges de akustiska fononernas dispersionsrelation av $\omega = v_s K$, det vill säga lutningen ges av ljudhastigheten.

   Diamant har två atomer per primitiv enhetscell, så det finns tre optiska och tre akustiska grenar.

   Aluminium har FCC-struktur och därför en atom per primitiv enhetscell. Detta ger att Al endast har tre akustiska grenar och inga optiska.

   Värmekapacitiviteten C_v ges av $C_v = C_v^{fo} + C_v^{el}$ där fononbidraget finns i alla kristaller och elektronbidraget endast finns i metaller där det finns elektronnivåer vid Ferminivån. $C_v^{fo} \to 3R_0$ då T är stor jämfört med Debye temperaturen θ_D och $C_v^{fo} \to \frac{12\pi^4}{5} R_0 \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3$ då $T \to 0$. Elektronbidraget ges av $C_v^{el} = \frac{1}{2}\pi^2 R_0 T/T_F$ och det har betydelse endast vid låga temperarurer eftersom T_F är stor till och med jämfört med metallens smältpunkt. Detta medför att för en metall gäller att $C_v \to 3R_0$ då T är stor jämfört med Debye temperaturen θ_D och $C_v^{fo} \to \frac{12\pi^4}{5} R_0 \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi^2 R_0 T/T_F$ då $T \to 0$.

   För diamant är $\theta_D = 2230$ K och för aluminium är $\theta_D = 428$ K.

3. (a) De primitiva translationsvektorerna ges t.ex. av $\mathbf{a_1} = \frac{a}{2}(1,1)$ och $\mathbf{a_2} = \frac{a}{2}(-1,1)$.

   (b) De reciproka translationsvektorerna ges av $\mathbf{a_i} \cdot \mathbf{b_j} = 2\pi\delta_{ij}$ vilket ger $\mathbf{b_1} = \frac{2\pi}{a}(1,1)$ och $\mathbf{b_2} = \frac{2\pi}{a}(-1,1)$. Det reciproka gittret och Brillouizonen visas i figuren.

   (c) I två dimensioner så upptar varje k-vektor arean $(2\pi/L)^2$ i reciproka rummet om man antar periodiska randvilkor över längden L. Dessutom ges fermivågvektorn k_F av den cirkel innanför vilken alla N elektroner ryms. Detta ger $2 \cdot \frac{\pi k_F^2}{(2\pi/L)^2} = N \rightarrow k_F = \sqrt{2\pi n}$, där $n = N/L^2$.

   (d) Från figuren av den reella kristallen ser man att det finns två atomer på ytan a^2. Om man antar att varje atom har z valens elektroner blir elektrontätheten $n = 2z/a^2$ I uppgift ?? ser vi att den kortaste reciproka translationavektorern ges av $\mid \mathbf{b_1} \mid = \mid \mathbf{b_2} \mid = \mid \frac{2\pi}{a}(1,1) \mid = 2\sqrt{2}\pi/a$, vilket medför att det kortaste avståndet till Brillouinzongränsen är $\sqrt{2}\pi/a$. Detta ger $\sqrt{2\pi\frac{2z}{a^2}} = \sqrt{2}\pi/a \rightarrow z = \frac{\pi}{2}$, då k_F tangerar Brillouin zonens yta. Om legeringen ges av AB_x, där A är monovalent och B är divalent ges z av $\frac{1+2x}{1+x} = z = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 1.3$.

4. (a) För en intrinsisk halvledare gäller $n_i = p_i$. Detta ger att konduktiviteten ges av $\rho = n_i e(\mu_e + \mu_h)$ och Hallkoefficienten av $R_H = \frac{n_i(\mu_h^2 - \mu_e^2)}{e n_i^2 (\mu_h + \mu_e)^2}$. Detta samband ger $R_H = \frac{\mu_h^2 - \mu_e^2}{\rho(\mu_h + \mu_e)}$ Vilket ger $\mu_h = 0.21$ m^2/Vs.

   (b) Den intrinsiska konduktiviteten $\rho = n_i e(\mu_e + \mu_h)$ ger $n_i = p_i = \frac{\rho}{e(\mu_h + \mu_e)} = 2.5 \cdot 10^{12}$m^{-3}.

   (c) Antalet ledningselektroner ges av $n_i = 2\left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{(\mu - E_c)/k_B T}$. Detta ger $\mu - E_c = -0.596 eV$ dvs μ ligger 0.6 eV under ledningsbandkanten.

   (d) Antalet laddningsbärare är $\propto T^{3/2} e^{-E_g/2k_BT}$. Eftersom $\mu_{e,h} \propto T^{-3/2}$ enligt uppgiften, erhåls $\rho = n_i e(\mu_e + \mu_h) \propto e^{-E_g/2k_BT}$ som medför att $\ln\rho = konstant - E_g/2k_BT$. Med de två givna värdena: $\rho(300K) = 4.80 \cdot 10^{-7}$ $(\Omega\text{m})^{-1}$ och $\rho(600K) = 0.48$ $(\Omega\text{m})^{-1}$ får man med hjälp av tvåpunktsformeln för räta linjen $\frac{\rho(600K) - \rho(300K)}{1/600 - 1/300} = -\frac{E_g}{2k_B}$ ur vilket fås $E_g = 1.4$ eV.

5. (a) Fermienergin ges av $E_F = E(k_F)$. Kittel s.148 ger

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}, \text{ så } \quad E_F = \hbar c k_F = \hbar c \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}.$$

   (b) Från uttrycket ovan ser vi att antalet tillstånd med energi mindre än E ges av

$$N = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^3.$$

   Tillståndstätheten ges nu av

$$D(E) \equiv \frac{dN}{dE} = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} E^2.$$