Luleå tekniska universitet
Avdelningen för Fysik, 2004
Per Arve och Hans Weber

Rörelsemängdsmoment och spinn

Rörelsemängdsmomentet är ett mått på hur mycket rotation en partikel har (eller ett system av partiklar eller en stel kropp). Såväl inom klassisk mekanik som kvantmekanik är rörelsemängdsmomentet $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. I klassisk mekanik gäller att dess tidsderivata $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{M}$, där $\boldsymbol{M}$ är (kraft-) momentet $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Om potentiella energin är rotationssymmetrisk så är kraften som verkar på partikeln riktad i radiell led och momentet med avseende på potentialens centrum noll. Alltså är $\boldsymbol{L}$ en tidsoberoende vektor under hela rörelsen. Detta kan utnyttjas då man beräknar t.ex. en planets bana runt solen.

Inom kvantmekaniken gäller att $\boldsymbol{L}^2$ har ett bestämt värde hos egentillstånden (se Gasiorowicz, kap. 7 och suppl 7B). Detta värde är $\hbar^2 l(l+1)$ där l är något av heltalen $l = 0, 1, 2, \ldots$. Dessutom kan energi-egentillstånden väljas så att de är egentillstånd till en av $\boldsymbol{L}$:s komponenter, t.ex. L_z. I detta fall är tillståndets vågfunktion

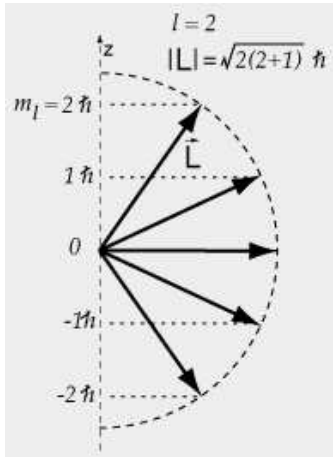
$$u_E(\boldsymbol{r}) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi). \tag{1}$$

Kvanttalet m anger att egenvärdet för rörelsmängdsmomentets z-komponent är $\hbar m$. Detta innebär i sin tur att $Y_{lm} \propto \exp(im\phi)$, dvs i ϕ-led är den en komplex våg med m stycken vågor på ett varv runt z-axeln. De olika möjliga m-värden som förekommer för ett visst l-värde är $m = -l, -l+1, ..., l-1, l$, dvs $(2l+1)$ olika värden.

Det är av intresse att betrakta vektorn $\boldsymbol{L}$ för dessa tillstånd. Dess längd är

$$\sqrt{\boldsymbol{L}^2} = \hbar\sqrt{l(l+1)} \tag{2}$$

vilket är något större än det största värdet på L_z, $\hbar l$. Samtidigt gäller att eftersom



Figur 1: För tillstånden Y_{lm} ligger rörelsemängdsmomentets vektor på cirkeln som är skärningen mellan planet $L_z = \hbar m$ och klotet.

operatorerna L_x och L_y inte kommuterar med L_z så är deras värden ej välbestämda. I själva verket är de helt obestämda med $< L_x >=< L_y >= 0$, medan $L_x^2 + L_y^2 = \boldsymbol{L}^2 - L_z^2$ har ett välbestämt värde, $\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2$. Dessa fakta om vektorn $\boldsymbol{L}$ för tillstånden (1) illustreras i figuren. Denna bild avviker klart från motsvarande klassiska situation där $\boldsymbol{L}$ är en konstant vektor som pekar i en bestämd riktning. Kvanttalet m kallas ofta det magnetiska kvanttalet. Anledningen är att enligt klassisk fysik ger elektronen i sin bana"upphov till ett magnetiskt moment

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}\,. \tag{3}$$

I ett svagt magnetfält $\boldsymbol{B}$ kommer enligt den klassiska fysiken elektronens energi att ändras med

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}\,. \tag{4}$$

I kvantfysiken är $\boldsymbol{\mu}$ (3) en operator, så att för fallet att magnetfältet är riktad i z-led, $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, blir ändringen av Hamiltonoperatorn

$$H_1 = \frac{eB}{2m_e}L_z\,. \tag{5}$$

Om man lägger till en sådan term ändras energierna med precis $B(e\hbar/2m_e)m$, medan vågfunktionerna förblir desamma. (Den klassiska fysiken ger i detta fall att vektorn $\boldsymbol{L}$ är tidsberoende och pressecerar kring z-axeln, dvs endast L_z och $\boldsymbol{L}^2$ är konstanta, medan L_x och L_y är tidsberoende).

Experiment ger dock inte den uppsplittringen. Antalet nivåer man får stämmer ej. Detta beror på att elektronen i sig själv är en liten magnet vars riktning ges av elektronens spinn. Spinnet är en form av rörelsemängdsmoment som elektronen bär med sig. Innan vi behandlar detta matematiskt, går vi tillbaka till den matematiska behandlingen av rörelsemängdsmoment. Man inför stegoperatorerna L_+ och L_-. Dessa är relaterade till rörelsemängdsoperatorerna i x-led och y-led enligt,

$$L_x = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right), \quad L_y = \frac{1}{2i}\left(L_+ - L_-\right). \tag{6}$$

Med hjälp av dessa operatorer och deras kommutaionsrelationer $[L_z, L_+] = \hbar L_+$, $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$ och $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$ kan man få fram att L_+ ökar m-kvanttalet och att L_- minskar m-kvanttalet enligt följande,

$$\begin{aligned} L_+|Y_{l,m}> &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|Y_{l,m+1}>, \\ L_-|Y_{l,m}> &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|Y_{l,m-1}>\,. \end{aligned} \tag{7}$$

De olika m-värdena skiljer alltså sig med en enhet. Dessutom får man fram för de maximala och minimala m-värdena, m_{max} och m_{min}, att $m_{min} = -m_{max} = -l$. Från detta får vi att antalet olika m-värden är $2l+1$, och alltså att $2l$ är ett heltal. L_z operatorns relation till vinkeln ϕ, ger dessutom att m-värdena är heltal.

Spinn

Elektronen har liksom många andra partiklar ett inre rörelsemängdsmoment, som vi kallar spinn. Elektronens spinn har två olika tillstånd, spinn upp"eller spinn ner". Existensen av dessa två tillstånd märks bland annat i Pauliprincipen, som säger att högst två elektroner i en atom kan ha samma värde på n-, l- och m-kvanttalen. Spinnet märks också, som nämnts ovan, då man mäter energin hos atomer i ett magnetfält.

Det är viktigt att lägga märke till att spinnet är en annan än egenskap hos elektronen än dess 'rörelse' i rummet som ges av vågfunktionen som vi diskuterat tidigare. Beskrivningen av spinnets tillstånd inbegriper alltså inte funktioner av vinklarna θ och ϕ. Jämför till exempel med jordens rotation kring sin egen axel och dess bana runt solen. Rörelsen runt solen kan ses som en rörelse hos masscentrum. Rotationen kring den egna axeln är en rörelse hos olika delar relativt masscentrum. Dock får vi vara försiktiga med användandet av denna analogi eftersom elektronens spinn inte kommer från en relativ rörelse hos elektronens beståndsdelar. Sådana finns inte efter vad vi vet. Skulle de finnas så hade deras relativa rörelse ge upphov till $(2l+1)$ stycken tillstånd, dvs ett udda antal och inte två.

Spinnet är ett slags rörelsemängdsmoment och det finns en uppsättning operatorer S_x, S_y och S_z, Dessa har samma kommutionsrelationer som rörelsemängdsmomentet. Som vi sett gäller utgående från kommutationsrelationerna mellan L-operatorerna gäller att $2l$ måste vara ett heltal. Utgående från detta finns också möjlighet att rörelsmängdskvanttalet $l = 1/2, 3/2, ...$ För spinnet hos elektronen gäller en av dessa. Dock betecknas detta kvanttal inte med l utan istället med s. Det är uppenbarligen 1/2 eftersom antalet olika m-värden är $(2s+1) = 2$. De två m-tillstånden är just spinn upp"$(m_s = 1/2)$ och spinn ner"$(m_s = -1/2)$. Index s används för att särskilja spinnets m-värde från m-kvanttalet som kommer från elektronens rörelse"(vågfunktion) i rummet (x, y, z).

De två normerade och ortogonala tillstånden χ_+ och χ_-,

$$< \chi_- | \chi_+ >= 0 \quad < \chi_\pm | \chi_\pm >= 1 \,. \tag{8}$$

kan användas som bas för vilket spinntillstånd som helst,

$$\chi = a\chi_+ + b\chi_- \,. \tag{9}$$

För att ange χ behövs enbart de två talen a och b. Tillståndet kan alltså representeras av vektorn

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \,. \tag{10}$$

Genom att i (9) och (10) sätta a=1 och b=0 och omvänt fås att

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,. \tag{11}$$

En operator som verkar på χ ger ett nytt tillstånd $\chi' = A\chi$. Om operatorn A är linjär representeras den av en matris,

$$A\chi = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \,. \tag{12}$$

Sambandet mellan matriselementen och resultatet (värdet) då A verkar på χ_+ och χ_- inser vi från att

$$A\chi_+ = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix},$$
$$A\chi_- = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

De tre spinn-operatorerna S_x, S_y och S_z är motsvarigheterna till L_x, L_y och L_z, som är det (rumsliga) banrörelsemängdsmomentet. Vilken matris som ger S_z framgår av att $\chi_\pm$ båda är egentillstånd,

$$S_z\chi_\pm = \pm\frac{1}{2}\hbar\chi_\pm \tag{14}$$

varför S_z är diagonal,

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Verkan hos $S_x = (S_+ + S_-)/2$ och $S_y = (S_+ - S_-)/2i$ ges av att de har samma kommutionsrelationer som banrörelsemängdsmomentet. Därmed verkar S_+ och S_- i enlighet med ekvation (7),

$$S_+\chi_+ = 0 \quad \text{och} \quad S_-\chi_- = 0 \tag{16}$$

$$\begin{aligned} S_+\chi_- &= \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)}\,\chi_+ \\ &= \hbar\chi_+ \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} S_-\chi_+ &= \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}\,\chi_- \\ &= \hbar\chi_-\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Matriserna för S_+ och S_-

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

och matriserna för S_x och S_y blir därmed

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Efter denna exercis med spinnoperatorers matriser, övergår vi till lite fysik. En laddad partikel med ett spinn har ett (inre) magnetiskt moment

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{g_s e}{2m_e}\boldsymbol{S}\,. \tag{21}$$

Ett sådant här magnetiskt moment är en direkt konsekvens av den relativistiska motsvarigheten till Schrödingerekvationen för en laddad partikel med $s = 1/2$, Dirac ekvationen. Denna ger $g_s = 2$ medan det verkliga värdet är $g_s = 2.0023\ldots$. Avvikelsen har att göra med kvantmekaniska fluktuationer hos det elektromagnetiska fältet och dylikt.

The appearance of the spin in the hamiltonian

The magnetic moment of the electron brings about many important effects. In the presence of a magnetic field there will be a term in the hamiltonian

$$H_1 = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \boldsymbol{B} = \frac{g_s e}{2m_e} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} \,. \tag{22}$$

If there is only an external constant magnetic field that interacts with the spin, then we can solve the dynamics of the spin degrees of freedom separately, by solely taking into account H_1. The time dependent Schrödinger equation for this part is

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}(t) = H_1 \chi(t) \tag{23}$$

This is conveniently solved by separation of variables, just as we solved the time dependent equation previously. That is, we assume that the solution is

$$\chi(t) = \chi_0 T(t) \tag{24}$$

where χ_0 is a time independent spin state. The time dependent function $T(t)$ comes out as $\exp(-iEt/\hbar)$ where the energy E is given by the equation for the spin state

$$H_1 \chi_0 = E \chi_0. \tag{25}$$

It is most convenient to solve (25) if the magnetic field is pointing in the z-direction. Then with $\alpha = g_s eB/2m_e$ the hamiltonian becomes $H_1 = \alpha S_Z$ and the eigenstates (χ_0) are the eigenstates of S_z, that is $\chi_\pm$ and the eigenvalues,

$$E = \pm\alpha \frac{\hbar}{2} = \pm \frac{g_s eB}{2m_e} \frac{\hbar}{2} \,. \tag{26}$$

The magnetic field coming from a permanent magnet (a ferromagnetic material) comes from the spin magnetic moments of the valence electrons.

However, the force that keeps the spins of the valence electrons in ferromagnetic materials to point in the same directions is remarkably not due to the electromagnetic interaction between magnetic moments.

Also neutrons and protons are particles with spin ($s = 1/2$). They interact with a magnetic field in just the same way as the electron though their g_s-values are somewhat bigger and the electron mass is replaced by the nucleon mass. The magnetic interaction between the magnetic moment of a proton (or some other nucleus) and a magnetic field is the basis of nuclear magnetic resonance (NMR). When a microwave with a frequency such that the photon energy $h\nu$ is equal to the energy separation between the two spin states,

$$h\nu = g_p \frac{eB\hbar}{2m_N} \tag{27}$$

then the microwave radiation is absorbed by the protons. NMR is used in chemistry as the resonance condition is slightly changed by chemical bonds. This change gives rather detailed information on the molecular structure. NMR is also used in the medicinal science under the name magnetic resonance imaging (MRI).

Elektronens (inre) magnetiska moment (21) ger upphov till flera intressanta fenomen, bl.a. permanenta magneter. Dess koppling till ett magnetiskt fält ges av samma uttryck som tidigare. Den ger också upphov till att spinnet och den rumsliga vågfunktionen påverkar varandra. Klassiskt har man att något som rör sig i ett elektriskt fält också kommer att känna av magnetiskt fält. (Jämför situationen att i stället laddningarna som ger upphov till fältet rör sig.) Detta magnetfält påverkar alltså en magnetisk dipol som rör sig i ett elektriskt fält. Det visar sig att för elektronen är detta magnetfält proportionellt mot $\boldsymbol{L}$ banrörelsemängdsmomentet. Bidraget till Hamiltonoperatorn blir alltså proportionellt mot $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$.

Detta ger upphov till en koppling mellan banrörelsen och spinnet. Därför borde vi tänka över hur man beskriver elektronens kvantmekaniska tillstånd då man både tar hänsyn till spinnet och den tidigare diskuterade vågfunktionen $\psi(\boldsymbol{r})$. Allmänt gäller att tillståndet nu kan skrivas som

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \psi_+(\boldsymbol{r})\chi_+ + \psi_-(\boldsymbol{r})\chi_- = \begin{pmatrix} \psi_+(\boldsymbol{r}) \\ \psi_-(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Detta är den allmänna formen för ett tillstånd som måste användas då det finns en koppling mellan spinn- och ban-rörelse". Dock kan man förenkla betydligt om spinn- och ban-rörelse"är oberoende av varandra. Då gäller som alltid för oberoende frihetsgrader att tillståndet är en produkt, i detta fallet

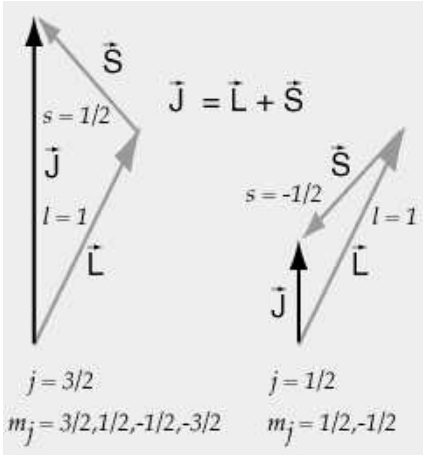
$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r})\chi = \psi(\boldsymbol{r}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{29}$$

$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$-bidraget till Hamiltonoperatorn ger upphov till tillstånd av typen

$$f(r) \begin{pmatrix} aY_{l,m_l-1} \\ bY_{l,m_l} \end{pmatrix} = f(r) \left[aY_{l,m_l-1}\chi_+ + bY_{l,m_l}\chi_- \right]. \tag{30}$$

Operatorn för det totala rörelsemängdsmomentet i z-led är $L_z + S_z$ och betecknas vanligtvis med J_z. Tillståndet ovan är en egenfunktion till J_z eftersom denna kommuterar med $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$-termen.

Det finns för ett givet värde på J_z två olika egentillstånd till $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ som motsvarar att spinn och banrörelsemängdsmoment är lika eller olika riktade, se figuren 2.



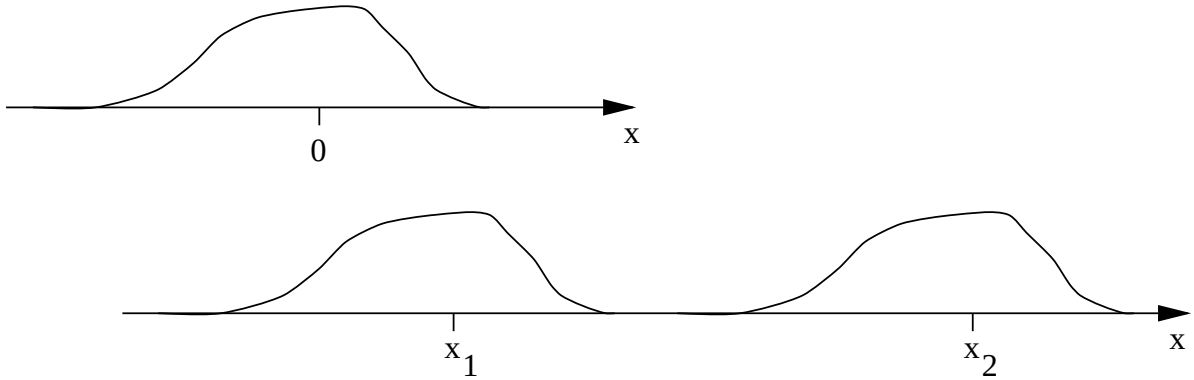
Figur 2: Addition av vektorerna $\boldsymbol{L}$ och $\boldsymbol{S}$ till det sammansatta $\boldsymbol{J}$.

Väntevärden och sannolikheter

Hur räknar man ut ett väntevärde av en spinnstorhet? Stern-Gerlach-experimentet är ett exempel på att man kan dela upp ett spinntillstånd $\chi = a\chi_+ + b\chi_-$ så att

$$\Psi_1 = \psi(x)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} \psi(x-x_1)a \\ \psi(x-x_2)b \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Spinn upp och spinn ner komponenterna i tillståndet placeras på olika platser i rummet. I området kring x_1 förekommer bara spinn uppöch i området kring x_2 bara spinn ner".



Figur 3:

I ett område där bara ett av spinntillstånden förekommer borde man kunna ignorera spinnet. Den är fix och oföränderlig om vi bara betraktar området kring en av punkterna x_1 eller x_2. Den blir som en storhet som många andra som inte har med systemet att göra. Då måste gälla att sannolikheten att hitta elektronen till exempel i närheten av x_1 $\int dx|a\psi(x-x_1)|^2$. Från detta sluter vi oss till att sannolikheten för spinn upp"i ursprungstillståndet Ψ_1 respektive sannolikheten för spinn ner"är

$$P(\uparrow) = |a|^2, \quad P(\downarrow) = |b|^2. \tag{32}$$

Vi har använt att $\int dx|\psi(x)|^2 = 1$. Eftersom det bara finns två olika värden på spinnets z-komponent, måste summan av dessa två sannolikheter vara ett,

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{33}$$

Väntevärdet av S_z ges av

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2}|a|^2 - \frac{\hbar}{2}|b|^2 \tag{34}$$

Detta liksom väntevärdet av vilken spinnoperator som helst, kan skrivas

$$\langle S_n \rangle = (a \;\; b)^* \, S_n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{35}$$

där S_n i högra ledet är matrisen som representerar spinn-operatorn i riktning n, t.ex. x, y eller z.

Om man istället mäter spinnets komponent i y-riktningen, vilka olika värden kan då uppmätas och med vilken sannolikhet? De resultat som en mätning kan ge är egenvärdena till S_y matrisen. Sannolikheten ges av spinntillståndets koefficienter, förutsatt att spinntillståndet uttrycks i matrisens egenvektorer.

Exempel 1. Vad är sannolikheten att tillståndet $\chi = \chi_+$ vid en mätning av spinnet i y-riktningen ger ett positivt värde?

Lösning: För att besvara frågan måste egenvärdes/egenvektors ekvationen lösas.

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{36}$$

En ekvation som har icke triviala lösningar enbart för vissa värden på λ Dessa fås genom att vänsterledet flyttats över till vänster sida om likhetstecknet så att ett homogent ekvationssystem uppstår,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -i\frac{\hbar}{2} \\ i\frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0\,. \tag{37}$$

Determinanten av denna matris måste då vara noll,

$$(-\lambda)^2 - (-i)\frac{\hbar}{2}i\frac{\hbar}{2} = 0\,. \tag{38}$$

Egenvärdena $\lambda_{1,2}$ är därmed $\pm\frac{\hbar}{2}$. Sannolikheten för ett positivt mätvärde är därmed samma som sannolikheten för att mäta värdet $\frac{\hbar}{2}$. Denna ges av koefficienten som multiplicerar den normerade egenvektorn motsvarande detta egenvärdet. Egenvektorerna fås genom att lösa ekvationssystemet (36),

$$\lambda = \frac{\hbar}{2} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \lambda = -\frac{\hbar}{2} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Amplituden, A, för detta tillståndet erhålls genom att ta skalärprodukten mellan egenvektorn och tillståndet χ,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Sannolikheten för ett postivt värde är $|A|^2 = 0.5$.

Flera av resultaten i exemplet kunde vi kanske gissat oss till utan någon räkning. Räkningen illustrerar dock hur de kvantfysikaliska principerna tillämpas på spinnet.

Exempel 2. Vilka är egentillstånden till spinnoperatorn i riktningen som ges av vektorn $\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, cos\theta)$?

Lösning: Operatorn $S_{\mathbf{n}}$ ges av skalärprodukten

$$S_{\mathbf{n}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z \,. \tag{41}$$

Följdaktligen är dess matris

$$S_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} . \tag{42}$$

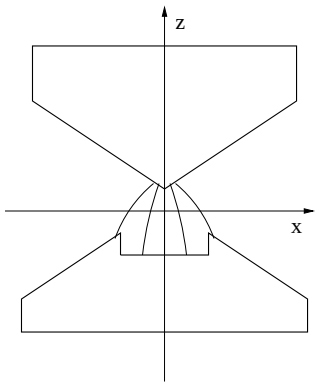
Det är lätt att kontrollera att egenvärdena är $\pm\hbar/2$. Motsvarande egenvektorer är

$$\lambda = \frac{\hbar}{2} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad \lambda = -\frac{\hbar}{2} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} . \tag{43}$$

Stern-Gerlachs experiment

Elektronens inre magnetiska dipolmomentet har samma riktning som spinnet. Magnetfält kan därmed utnyttjas för att testa egenskaperna hos spinnet. Stern-Gerlachs experiment (1921) är ett illustrativt exempel på detta.

Stern och Gerlach använde ett inhomogent magnetfält enligt nedanstående figur 4. Man lät neutrala silveratomer passera genom ett sådant magnetfält en sträcka. Sil-



Figur 4: Illustration av de magnetiska fältlinjerna i en Stern-Gerlach apparat.

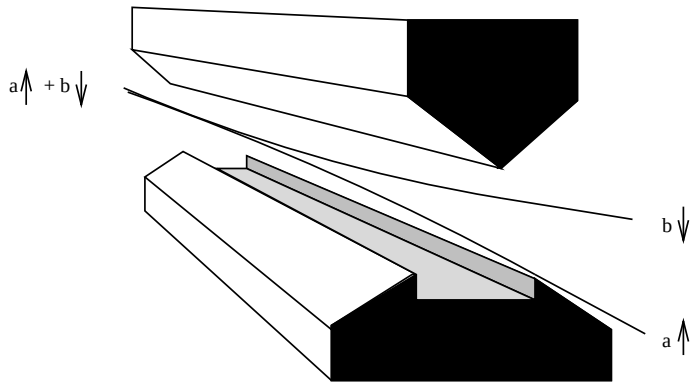
veratomer har en valenselektron i 5s (n=5, l=0). Övriga elektroner befinner sig i helt fyllda "skal". Silveratomens magnetiska moment kommer därför endast från valenselektronens inre magnetiska moment. (Kärnans magnetiska moment är försummbart.) Den magnetiska energin $-\mu \cdot \mathbf{B}$ blir z-beroende. Klassiskt motsvarar detta en kraft

$$\mathbf{F} = \nabla\mu \cdot \mathbf{B} = \nabla(\mu_x B_x + \mu_z B_z). \tag{44}$$

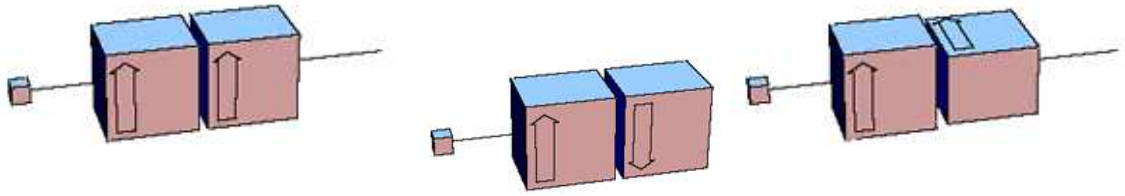
Om partikeln är centrerad i x-led är magnetfältet riktat i z-led. kraften riktad i z-axelns positiva eller negativa riktning, beroende på riktningen hos den magnetiska dipolen

$$\mathbf{F} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{45}$$

Vi kan lungt använda klassiska resonemang med krafter och banor för atomerna som skickas in i apparaten om den magnetiska energin varierar väldigt lite över en de-Broglie-våglängd för silveratomerna. Dessa kommer följdaktligen ut i två strålar enligt figur 5. Om man placerar två apparater (i form av spin-filter) efter varandra så att enbart den ena strålen från den första apparaten kommer in i den andra, får man in i apparat nummer två en stråle av silveratomer med spinn upp (eller ner) med avseende på z-axeln. Om apparat nummer två dessutom är vriden så att det är en vinkel θ mellan appartaternas z-axlar kan man undersöka relationerna mellan olika spinntillstånd. Detta är fallet till höger i figur 6.



Figur 5: Uppdelningen en Stern–Gerlach magnet av en elektronstråle i två strålar, en med spinn upp och en med spinn ner.



Figur 6: Spin filters made from Stern–Gerlach magnets. The filter lets just one spin direction pass as indicated by the arrows. To the left the beam passes the filters as they both accept spin up. In the middle the beam is blocked as the first filter lets spin up pass but the second filter lets only spin down pass which is no longer present. To the right the first filter lets spin up pass but the second filter is probing an orthogonal direction and the spin up beam from filter one has to be expanded in eigenstates for filter number two, and hence part of the beam will pass.