LULEÅ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Division of Physics

Solution to written exam in Quantum Physics and Statistical Physics MTF131

Examination date: 2005-12-17

1. The eigenfunctions of the infinite square well in one dimension are (Here a solution of the S.E. in one dimesion is adequate)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{and the eigenenergys are } E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \text{where} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

The energy of the emitted photon is given by

$$h\nu = E_1 - E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(1^{-2}2^{-2}\right)$$

and hence the frequency would be $\nu' = \nu/9$.

2. Trycket ges av $P = k_BT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = \frac{Nk_BT}{V-bN} - \frac{aN^2}{V^2}$ vilket kan skrivas som $\left(P + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V - bN) = Nk_BT$. Inre energin ges av $U = k_BT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = N\left(\frac{3k_BT}{2} - \frac{aN}{V}\right)$

3. Följande antal tillstånd finns för hemoglogin med 0, 1, 2, 3 eller 4 syremolekyler: 1, 4, 6, 4 och 1. Kemiska aktiviteten för O_2 är $\lambda = e^{\mu/\tau}$, ϵ är energin för en bunden O_2. Stora tillstånds summan är $Z = 1 + 4\lambda e^{-\epsilon/\tau} + 6\lambda^2 e^{-2\epsilon/\tau} + 4\lambda^3 e^{-3\epsilon/\tau} + \lambda^4 e^{-4\epsilon/\tau}$. sannolikheten för 1 syremolekyl $P(1) = \frac{4\lambda e^{-\epsilon/\tau}}{Z}$ och sannolikheten för 4 syremolekyler $P(4) = \frac{\lambda^4 e^{-4\epsilon/\tau}}{Z}$. Figuren över $P(1)$ kommer $P(1)$ att uppvisa ett maximum vid något λ och figuren över $P(4)$ kommer $P(4)$ att gå från 0 mot 1 med ökande λ.

4.

$$< S_x >= \frac{1}{9}(2+i, 2)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{9}\hbar$$

$$< S_y >= \frac{1}{9}(2+i, 2)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{9}\hbar$$

$$< S_z >= \frac{1}{9}(2+i, 2)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\hbar$$

För spinnmatriserna gäller att σ_i^2 är lika med enhetsmatrisen för i lika med x, y eller z. Detta ger:

$$< S_x^2 >=< S_y^2 >=< S_z^2 >= \hbar^2\frac{1}{36}(2+i, 2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\hbar^2$$

5. Rewrite $L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2$, which gives the Hamiltonian

$$H = \frac{L^2 - L_z^2}{2\hbar^2} + \frac{L_z^2}{3\hbar^2}.$$

The eigenfunctions are $Y_{l,m}$

$$HY_{l,m} = \left(\frac{L^2 - L_z^2}{2\hbar^2} + \frac{L_z^2}{3\hbar^2}\right) Y_{l,m} = \left(\frac{l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2}{2\hbar^2} + \frac{m^2\hbar^2}{3\hbar^2}\right) Y_{l,m}.$$

Hence the energies are:

$$E_{l,m} = \left(\frac{l(l+1)}{2} - \frac{m^2}{6}\right).$$

The lowest (ground state) energy is $E_{0,0} = 0$ ($l = 0$ no rotation).

$l = 1 \rightarrow m = 0, \pm 1$, gives $E_{1,0} = 1\text{eV}$ $E_{1,\pm 1} = \frac{5}{6}\text{eV}$

$l = 2 \rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2$, gives $E_{2,0} = 3\text{eV}$ $E_{2,\pm 1} = \frac{17}{6}\text{eV}$ $E_{2,\pm 2} = \frac{7}{3}\text{eV}$

and so on.