

Number 14, 15, 16, and 17 also in English.  
Sammanställning av tentamensuppgifter Kvant–EEIGM (MTF057).

### 1. Partikel i en en-dimensionell låda.

En partikel rör sig i den en-dimensionella potentialen  $V(x)$ , som ges av

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty & ; & x \leq 0 \\ V(x) &= 0 & ; & 0 < x < L \\ V(x) &= \infty & ; & x \geq L . \end{aligned}$$

- Beräkna de normerade egenfunktionerna  $\psi_n(x)$  för denna partikel.
- För en elektron i ovanstående potentiallåda observeras den längsta övergångsfrekvensen till att vara  $1.50 \cdot 10^{14}$  Hz. Beräkna lådans längd.

### 2. Harmoniska oscilatorn.

En partikel med massan  $m$  befinner sig i en omgivning som ger upphov till en potentiell energi för partikeln

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad (1)$$

Visa att grundtillståndets vågfunktion kan skrivas  $Ae^{ax^2+bx}$  och bestäm konstanterna  $a$  och  $b$ . Vilka värden kan partikelns energi anta. (endast rörelse i x-led)

### 3. Exciterat väte

En elektron rör sig i Coulomb fältet från en proton. Elektronen är i ett tillstånd som kan beskrivas med följande vågfunktion:

$$\frac{1}{6}[4\psi_{100}(r) + 3\psi_{211}(r) - \psi_{210}(r) + \sqrt{10}\psi_{21-1}(r)] \quad (2)$$

där  $\psi_{nlm_l}(r)$  är normerade väteegenfunktioner.

- Vad är vänte värdet av energin ?
- Vad är vänte värdet av  $\mathbf{L}^2$  ?
- Vad är vänte värdet av  $L_z$  ?

### 4. Vätespektrat

Ett flertal spektralserier för Väte har ett eget namn som tex Balmer serien som studerades på labben. En annan serie heter Humphrey serien. Den börjar vid våglängden 12368 nm och har kunnat följas ända ner till våglängden 3281.4 nm.

- Vilka övergångar rör det sig om (mellan vilka n-kvantal)?
- Vilka två våglängder följer på 12368 nm ?

## 5. Rörelsemängdsmomentet

Beräkna den ändring i rörelsemängdsmomentet som en kvävemolekyl undergår då den emitterar strålning med våglängden  $\lambda = 1250\mu\text{m}$ . Övergången sker mellan två närliggande rotationsnivåer. Avståndet mellan kväveatomerna i molekylen är  $d = 1.094 \text{ Å}$ . Rörelsemängdsmomentet för rotationsnivån  $l$  ges av  $\sqrt{l(l+1)\hbar}$ .

## 6. Partikel i en en-dimensionell låda.

En partikel rör sig i den en-dimensionella potentialen  $V(x)$ , som ges av

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty & ; & x \leq 0 \\ V(x) &= 0 & ; & 0 < x < L \\ V(x) &= \infty & ; & x \geq L . \end{aligned}$$

- Beräkna de normerade egenfunktionerna  $\psi_n(x)$  för denna partikel.
- Hur mycket ändrar sig grundtillståndets energi om lådans väggar flyttas isär så att lådpotentialen får den nya bredden  $L' = 2L$ .

## 7. Harmoniska oscillatorn

En partikel med massan  $m$  befinner sig i en omgivning som ger upphov till en potentiell energi för partikeln  $V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ .

- Visa att en vågfunktion för detta system kan skrivas  $Ae^{ax^2+bx}$  och bestäm koefficienterna  $a$  och  $b$ .
- Vilka värden kan partikelns energi anta då den befinner sig i detta tillstånd?

## 8. Exciterat väte

Elektroner strömmar genom vätegas. Kollisionerna mellan elektroner och väteatomer ger upphov till bl.a. synligt ljus från väteatomerna. Ange vilka (synliga) våglängder det kan vara fråga om och ange kvanttalen för väteatomen före och efter att ljuset utsändes.

## 9. de Broglie vågen

- Enligt klassisk statistisk mekanik är den termiska kinetiska energin i medeltal given av formeln  $\frac{3}{2}k_B T$ , där  $k_B$  är Boltzmanns konstant och  $T$  är temperaturen i Kelvin. Vad är de Broglievåglängden för en fri elektron i ett system som har temperaturen 400 K ?
- Ett grundämne har joniserats så att det endast återstår en elektron, som är bunden till atomen. I en spektrometer uppmäts att våglängden för fotoner som emiteras vid en övergång mellan de innersta nivåerna är 253 nm. Vilket är grundämnet?

## 10. Partikel i en låda

- För en elektron i en endimensionell potentiallåda observeras den längsta övergångsfrekvensen till att vara  $2.00 \cdot 10^{14}$  Hz. Beräkna lådans längd.
- Vilken kinetisk energi har elektronen i grundtillståndet?

## 11. Vågfunktionen

En partikel i en endimensionell potentiallåda med längden  $L$  beskrivs av vågfunktionen

$$\psi_n(x, t) = Ce^{-i\frac{(n\pi)^2 \hbar t}{2mL^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$C$  är en konstant och  $n$  är ett heltal. Vad är sannolikheten att finna partikeln i ett intervall  $dx = 0.001L$  nära  $x = L/3$ ? (Utred fallen för olika  $n$ )

## 12. Väteliknande spektrum

$\text{Li}^{2+}$  jonen är vätelik och har följande Lyman serie  $740747 \text{ cm}^{-1}$ ,  $877924 \text{ cm}^{-1}$ ,  $925933 \text{ cm}^{-1}$  och så vidare.

- Visa att energinivåerna har formen  $-hcR/n^2$  och bestäm värdet på  $R$  för denna jon.
- Vilken energi behöver tillföras  $\text{Li}^{2+}$  jonen för att den skall bli av med elektronen dvs bli en  $\text{Li}^{3+}$  jon?

## 13. Kvävemolekylens rörelsemängdsmoment

Beräkna den ändring i rörelsemängdsmomentet som en kvävemolekyl undergår då den emiterar strålning med våglängden  $\lambda = 1250 \mu\text{m}$ . Övergången sker mellan två närliggande rotationsnivåer. Avståndet mellan kväveatomerna i molekylen är  $d = 1.094 \text{\AA}$ . Rörelsemängdsmomentet för rotationsnivån  $l$  ges av  $\sqrt{l(l+1)}\hbar/2\pi$ .

## 14. A particle in a one-dimensional box, Partikel i en en-dimensionell låda.

A particle is confined to the one-dimensional potential  $V(x)$ ,

$$\begin{aligned}V(x) &= \infty & ; & \quad x \leq 0 \\V(x) &= 0 & ; & \quad 0 < x < L \\V(x) &= \infty & ; & \quad x \geq L.\end{aligned}$$

- Determine the normalised eigenfunctions  $\psi_n(x)$  of the particle.
- How much does the energy of the ground state change if the wall's of the box are moved to give the new width  $L' = L/2$  of the box.

Sv:

En partikel rör sig i den en-dimensionella potentialen  $V(x)$ , som ges av

$$\begin{aligned}V(x) &= \infty & ; & x \leq 0 \\V(x) &= 0 & ; & 0 < x < L \\V(x) &= \infty & ; & x \geq L .\end{aligned}$$

- Beräkna de normerade egenfunktionerna  $\psi_n(x)$  för denna partikel.
- Hur mycket ändrar sig grundtillståndets energi om lådans väggar flyttas ihop så att lådpotentialen får den nya bredden  $L' = L/2$ .

## 15. Hydrogen atom, Väte atomens

- Determine for a 2p-electron the most probable distance from the nucleous of the hydrogen atom. (Do the calculations for the radial part only)
- Which of the following ten hydrogen states have the same energy (no external fields are applied). 3s with  $m_l = 0$ , 3p with  $m_l = 1$ , 4d with  $m_l = 1$ , 3p with  $m_l = -1$ , 5d with  $m_l = 1$ , 4p with  $m_l = 0$ , 5p with  $m_l = -1$ , 4p with  $m_l = -1$ , 5s with  $m_l = 0$ , 3p with  $m_l = 0$ .

Sv:

- Beräkna för en 2p-elektron det mest sannolika avståndet från kärnan i en väteatom. (Bortse ifrån att sannolikheten varierar med riktningen i rummet.)
- Vilka av följande tio vätetillstånd har samma energi (inga yttre fält är pålaggda). 3s med  $m_l = 0$ , 3p med  $m_l = 1$ , 4d med  $m_l = 1$ , 3p med  $m_l = -1$ , 5d med  $m_l = 1$ , 4p med  $m_l = 0$ , 5p med  $m_l = -1$ , 4p med  $m_l = -1$ , 5s med  $m_l = 0$ , 3p med  $m_l = 0$ .

## 16. Molekylspektra

In the fine structure spectra of  ${}^1\text{H}{}^{35}\text{Cl}$  the following spectral lines where detected  $2824,0 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2844,6 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2865,3 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2906,7 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2927,4 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2948,0 \text{ cm}^{-1}$  och  $2968,7 \text{ cm}^{-1}$ .

- There seems to be a line missing, why?
- what is the distance between the atoms of the molecule?

Sv:

I finstrukturspektra (rotationsspektra) från  ${}^1\text{H}{}^{35}\text{Cl}$  uppmätttes maxima vid  $2824,0 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2844,6 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2865,3 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2906,7 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2927,4 \text{ cm}^{-1}$ ;  $2948,0 \text{ cm}^{-1}$  och  $2968,7 \text{ cm}^{-1}$ .

- Det ser ut som det saknas ett maxima i serien. Vad beror det på?
- Vad är avståndet mellan atomerna i molekylen?

## 17. Harmoniska oscilatorn.

A particle of mass  $m$  is subjected to a surrounding that gives rise to a potential energy of the form

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad (3)$$

Show that the wavefunction of the ground state is  $Ae^{ax^2+bx}$  and determine the constants  $a$  and  $b$ . What are eigenvalues of the particles energy. (make the calculations for a one-dimensional oscillator, x-direction only)

Sv:

En partikel med massan  $m$  befinner sig i en omgivning som ger upphov till en potentiell energi för partikeln

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad (4)$$

Visa att grundtillståndets vågfunktion kan skrivas  $Ae^{ax^2+bx}$  och bestäm konstanterna  $a$  och  $b$ . Vilka värden kan partikelns energi anta. (endast rörelse i x-led)

## 18. Partikel i en en-dimensionell låda.

En partikel rör sig i den en-dimensionella potentialen  $V(x)$ , som ges av

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty & ; & x \leq 0 \\ V(x) &= 0 & ; & 0 < x < L \\ V(x) &= \infty & ; & x \geq L . \end{aligned}$$

- Beräkna de normerade egenfunktionerna  $\psi_n(x)$  för denna partikel.
- Visa att dessa egenfunktioner  $\psi_n(x)$  är ortogonal, dvs att  $\int_0^L \psi_m^*(x)\psi_n(x) = 0$  om  $n \neq m$ .