1

Ekvationslösning handlar mycket om utsagor eller påståenden

Ex: $\sqrt{3x^2+4} = 2x$ (1)

$x = 2$ (2)

månen är blå (3) (Falskt!)

börsen går ned nästa vecka (4)

behöver inte vara sanna, eller inte alltid sanna.

Däremot kan vi t ex se ovan att (1) ej är sant för alla x, men t ex att

Om $x=2$ så är $\sqrt{3x^2+4} = 2x$. (Sant!)

Kortare:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{3x^2+4} = 2x$$

Vi vet dock inte om det omvända gäller. Kan vi säga att om $\sqrt{3x^2+4} = 2x$ så är $x=2$ (alt. $\sqrt{3x^2+4}=2x \Rightarrow x=2$), dvs att $x=2$ är den enda lösningen till ekv. — " — ?

För att ta reda på det så får vi lösa ekvationen. För att vara riktigt pedantiskt noggran skriver vi $A \Rightarrow B$ ($B \Leftarrow A$ eller $\underset{B}{\overset{A}{\Downarrow}}$ om) det gäller att om A är korrekt så är B korrekt. Om det gäller även att $B \Rightarrow A$ så skriver vi $A \Leftrightarrow B$

$$\sqrt{3x^2+4} = 2x \quad \text{(*)}$$

Underförstått att $x \geq 0$ för vänsterledet ≥ 0

$$\Downarrow$$

$$3x^2+4 \;{-3x^2} = 4x^2 \;{-3x^2} \qquad \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4} = |2x|$$

$$\Updownarrow$$

$$4 = x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x=2 \text{ eller } x=-2$$

Men det omvända gäller inte! Vi har att ($x=2$ eller $x=-2$) $\not\Rightarrow \sqrt{3x^2+4}=2x$, ty för $x=-2$ får vi negativt högerled i (*). Går vi bakvägen, som indikerat med rött i räkningarna ovan, så får vi dock att

$$(x=2 \text{ eller } x=-2) \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4} = |2x| \quad \text{(SANT!)}$$

Enklare exempel (implikation men inte ekvivalens): $x=1 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ eller $x=-1$

Standardbeteckningar (för tal a, b och påståenden A, B)

$A \Rightarrow B$: A implicerar B, A medför B, Om A är sant så är även B sant.

$a = b$: a är lika med b (skriv t ex inte $(x-1)(x+1) \Rightarrow x^2-1$ om ni menar $(x-1)(x+1) = x^2-1$!)

$A \Leftrightarrow B$: A är ekvivalent med B, A är sant om och endast om B är sant

2

Ex 1.9: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(y-x)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} y-x=0 \Rightarrow y=x \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=4 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} y=x \\ 2y^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} y=x \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$$

Mängder

Mängd = en samling av ett antal objekt/element (i princip vad som helst.)

Ex Mängden av alla studenter på LTU just nu

$\mathbb{C}$ = mängden av alla komplexa tal (kommer först i M0049M "Matte 3")

$\mathbb{R}$ = mängden av alla reella tal

$\mathbb{Q}$ = mängden av alla rationella tal, d vs alla tal $\frac{m}{n}$ med m,n heltal.

$\mathbb{Z}$ = mängden av alla heltal

$\mathbb{Z}_+$ = mängden av alla positiva heltal

$\{1, 2, 7\}$ = mängden som består av talen 1, 2 och 7.

Intervall

Mängden av alla tal x sådana att $a<x<b$ = (a,b) = $]a,b[$

— " — $a \leq x < b$ = $[a,b)$ = $[a,b[$

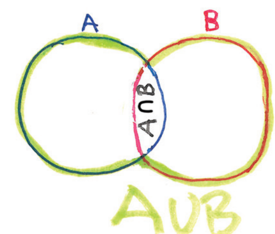
— " — $a < x \leq b$ = $(a,b]$ = $]a,b]$

— " — $a \leq b \leq b$ = $[a,b]$

Snitt: $A \cap B$ = mängden av alla x som ingår i både A och B

Union: $A \cup B$ = mängden av alla x som ingår i minst en av A och B.

Venn-diagram:
Areatolkning för mängder



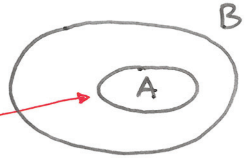
$[0,1] \cup [1,2] = [0,2]$

$[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$

Delmängd

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ A är en delmängd av $B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$

eller som Venn-diagram:



Ex.

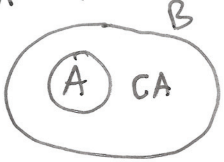
Äkta delmängd

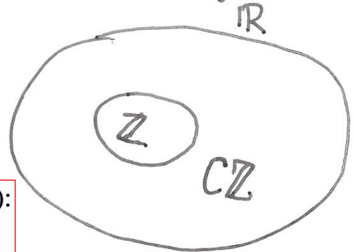
$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ men $A \neq B$

Komplement

CA = allt som inte ingår i A (men i någon underförstådd mängd $B \supset A$)

Ex





Exempel i $\mathbb{R}$ (med $A^C = A$-komplement):

$\{1\} \subset \{1,2,3\} \subset \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$[0,1] \subset \mathbb{R}$

$[0,1]^C = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

$[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$

Komplementet till $\mathbb{Z}$ (i $\mathbb{R}$) = mängden av alla reella tal som inte är heltal.

(Se avsnitt 1.6 för mer om mängder.)

Summor och produkter

Summatecken Σ:

$$5+10+15+20+25+30+35+40 = \sum_{k=1}^{8} 5 \cdot k$$

$5\cdot 1 + 5\cdot 2 + 5\cdot 3 + \cdots + 5\cdot 8$

$$1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + \cdots + 19\cdot 22 = \sum_{n=1}^{19} n\cdot(n+3)$$

$$\sum_{m=1}^{3} (-1)^m = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 1-1+1-1 = 0$$

Produkttecken Π:

$$2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)\cdot 6\cdot(-7)\cdot \cdots \cdot(-69) = \prod_{n=2}^{69} (-1)^n n$$

Aritmetiska och geometriska summor

Miniporträttet

Gauss — matematikernas konung

JAN UNENGE

I mitten av 1780-talet gick skollärare J G Büttner i Braunschweig för att ha lektion i en räkneklass bestående av ungefär 100 (!) elever i 9—10-års-åldern. Han såg fram emot en lugn lektion eftersom eleverna skulle få den krävande uppgiften att addera de hundra första heltalen, alltså 1+2+3...+99+100. Själv visste han ju svaret eftersom han kunde formeln för summan av talen i en aritmetisk talföljd. Föga anade han att denna dag skulle hamna i matematikens historia.

Bäst i klassen

Men då hände det. Gossen Carl Friedrich Gauss slog igenom för första gången. Efter några sekunder gav han svaret och förklarade för sin förbluffade lärare hur han tänkt. "Jo, om man lägger ihop första och sista talet, 1+100, får man 101. Samma summa får man om man lägger ihop det andra och det näst sista o s v. Alltså 2+99, 3+98. Och det blir 50 sådana grupper vardera med summan 101 så svaret blir 5050."

Skollärare Büttner skaffade avancerade läroböcker åt gossen men konstaterade snart att han inget hade att lära det unga geniet. "Jag kunde räkna innan jag kunde tala" påpekade Gauss senare.

Aritmetiska summor

Antag att vi vill summera alla heltal från 1 till 100, dvs

$$
\begin{aligned}
s &= 1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100\\
+\quad s &= 100+99+98+97+\cdots+4+3+2+1\\
\hline
2s &= \underbrace{101+101+101+101+\cdots+101+101+101+101}_{100\text{ st.}} = 100\cdot 201
\end{aligned}
$$

$$s = \frac{100\cdot 101}{2} = \frac{10\,100}{2} = 5050$$

En aritmetisk summa är en summa $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_N$ där $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=a_N-a_{N-1}$, dvs samma differens mellan varje två på varandra följande termer.

Ex: $3+7+11+15+19$

$-8+(-5)+(-2)+1+4$

För varje sådan summa kan vi skriva termerna på formen $a_n = a_0 + n\cdot d$ och använda samma knep som ovan:

$$
\begin{aligned}
s &= \boxed{a_1}+\boxed{(a_1+d)}+\boxed{(a_1+2d)}+\cdots+\boxed{(a_N-d)}+\boxed{a_N}\\
+\quad s &= \boxed{a_N}+\boxed{(a_N-d)}+\boxed{(a_N-2d)}+\cdots+\boxed{(a_1+d)}+\boxed{a_1}\\
\hline
2s &= \underbrace{(a_1+a_N)+(a_1+a_N)+(a_1+a_N)+\cdots+(a_1+a_N)+(a_1+a_N)}_{N\text{ termer}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{s = N\cdot\frac{a_1+a_N}{2} = (\text{antalet termer})\cdot\frac{(\text{minsta termen})+(\text{största termen})}{2}}$$

Ex: $13+18+23+28+\cdots+113 = \sum_{n=0}^{20}(13+n\cdot 5) = 21\cdot\frac{13+113}{2} = 21\cdot\frac{126}{2} =$

$= 21\cdot 63 = 1323$

samma!

$-8-5-2+1+4 = 5\cdot\frac{-8+4}{2} = 5\cdot\frac{-4}{2} = -10$

Geometriska summor

Geometriska summor är summor där kvoten $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ mellan två på varandra följande termer är konstant.

Tex

$$
\begin{aligned}
S_{N+1} &= \overbrace{1}^{=r^0}+r+r^2+r^3+\cdots+r^N = \sum_{n=0}^{N} r^n,\ r\neq 1.\\
-\quad rS_{N+1} &= r+r^2+r^3+r^4+\cdots+r^{N+1}\\
\hline
S_{N+1}-rS_{N+1} &= 1-\cancel{r}+\cancel{r}-\cancel{r^2}+\cancel{r^2}-\cancel{r^3}+\cancel{r^3}-\cancel{r^4}+\cancel{\cdots}-\cancel{r^N}+\cancel{r^N}-r^{N+1}
\end{aligned}
$$

$$(1-r)S_{N+1} = 1-r^{N+1}$$

$$S_{N+1} = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$$

Alltså: $$\boxed{\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}\quad \text{då } r\neq 1.}$$

Fallet $r=1$ är betydligt enklare: $\sum_{n=0}^{N} 1^n = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{N+1\text{ termer}} = N+1$

(Gäller även för det triviala fallet $r=0$ med konventionen $0^0=1$.)

Ex: $$\sum_{n=0}^{11}\frac{7}{(-3)^n} = 7\sum_{n=0}^{11}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n = 7\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{12}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= 7\,\frac{1-\frac{1}{3^{12}}}{1+\frac{1}{3}} = 7\cdot\frac{\frac{3^{12}}{3^{12}}-\frac{1}{3^{12}}}{\frac{4}{3}} = 7\cdot\frac{3^{12}-1}{3^{12}}\cdot\frac{3}{4} =$$

$$= 7\cdot\frac{3^{12}-1}{4\cdot 3^{11}}$$

Uppgifter sid 75–78 i "Derivator..."

Exempel (binära/hexadecimala tal):

$$1111111_2 = \sum_{k=0}^{6} 1\cdot 2^k = \frac{2^7-1}{2-1} = 128-1 = 127$$

$$FFFFFFF_2 = \sum_{k=0}^{6} 15\cdot 16^k = 15\cdot\frac{16^7-1}{16-1} = 16^7-1 = 268\,435\,455$$

Avsnitt P1 i Adams är i stort sett repetition av proppkursen. Något räkneexempel till av liknande typ:

P1.22 Vi skall finna alla lösningar till

$$6x^2 - 5x \leq -1$$

$$6x^2 - 5x + 1 \leq 0$$

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \leq 0$$

VL=0 om $x = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} - \frac{1 \cdot 24}{6 \cdot 24}} = \frac{5 \pm 1}{12}$

$x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ eller $x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \left(x - \tfrac{1}{3}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \leq 0$$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$x - \frac{1}{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{1}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

≤ 0 här

SVAR: $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$, det vill säga $x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

P1.26 Vi skall finna alla lösningar till

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$

$$\frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$g(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)} < 0$$

x		-5		-1		1	
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	Ej def	$-$	Ej def	$+$

SVAR: $x < -5$ eller $-1 < x < 1$, det vill säga $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$

P1.32

$$\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 1$$

$$\frac{s}{2} - 1 = \pm 1$$

$$\frac{s}{2} = 1 + 1 = 2 \quad \text{eller} \quad \frac{s}{2} = -1 + 1 = 0$$

SVAR: $s = 0$ eller $s = 4$

P1.36

$$|t+2| < 1 \iff -1-2 < t+2-2 < 1-2$$

$$-3 < t < -1$$

SVAR: $t \in (-3, -1)$

Alternativ lösning (ej enklare här)

t: För $t < -2$ är $t+2 < 0$:	-2 — För $t \geq -2$ är $t+2 \geq 0$:
$-(t+2) < 1$	$t+2 < 1$
$t+2 > -1$	$t < -1$
$t > -3$	Alltså $-2 \leq t \leq -1$
Alltså $-3 < t < -2$	

sammantaget får vi återigen $-3 < t \leq -1$, det vill säga $t \in (-3, -1)$

Mer liknande från genomgångar i proppkursen

Absolutbelopp

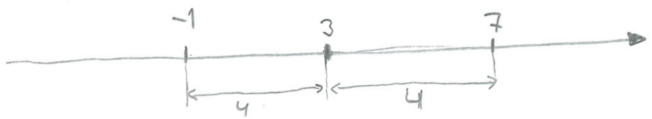
$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Avståndstolkning

Avstånd mellan a och b:

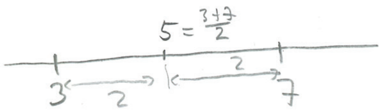
$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{om } \overbrace{a-b \geq 0}^{a \geq b} \\ \underbrace{-(a-b)}_{=b-a} & \text{om } \underbrace{a-b<0}_{a<b} \end{cases} = \text{avståndet mellan } a \text{ och } b$$

För vilka x är $|x-3| < 4$



Svar: $-1 < x < 7$

Skriv $3 < x < 7$ på formen $|x-a| < b$



SVAR: $|x-5| < 2$

Oftast måste man dela upp i specialfall

För vilka x är $|x-3| + x < 4$?

$x < 3$	$x \geq 3$
$-(x-3)+x < 4$	$x-3+x < 4$
$3 < 4$	$2x < 7$
sant för alla $x < 3$	$x < \frac{7}{2} = 3{,}5$

SVAR: $x < \frac{7}{2}$

2.23 c) $x + |2x-3| \geq |x-1| + 2$

$x \leq 1$	$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$	$x \geq \frac{3}{2}$
$x-(2x-3) \geq -(x-1)+2$	$x-(2x-3) \geq x+1,\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$	$3x-3 \geq x+1$
$-x+3 \geq -x+3$	$-x+3 \geq x+1$	$2x \geq 4$
Sant för alla $x \leq 1$	$-2x \geq -2$	$x \geq 2$
	$x \leq 1$ och $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$	
	Alltså: $x = 1$	

För olikheter, liksom för likheter, så

SVAR: $x \leq 1$ eller $x \geq 2$

olikheter

För vilka x gäller att $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3) > 0$?

Teckenbyte precis då $x = 1, 2, 3$, så vi kollar tecknet i intervallen där emellan.

x		1		2		3	
$x-1$	−	0	+	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	0	+	+	+
$x-3$	−	−	−	−	−	0	+
$p(x)$	−	0	+	0	−	0	+

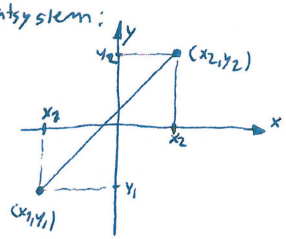
SVAR: $p(x) > 0$ för $1 < x < 2$ och för $x > 3$

Läs själva och gör avgifter för absolutbelopp och olikheter (repetition från proppkursen). Direkt vidare till avsnitt P2 här:

7

Räta linjens ekvation, samt villkor för vinkelräta linjer

Koordinatsystem:



Ett ortogonalt koordinatsystem är ungefär som en karta där man kan ange koordinater för alla punkter i planet

Definition (lutning)

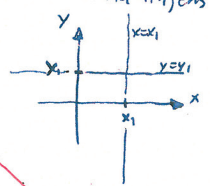
Om (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är två punkter på en (icke lodrät) linje med $x_2 > x_1$ så säger vi att linjen har *lutning*

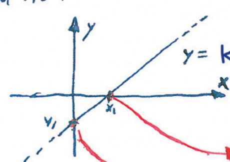
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

I bilden längst ned på sidan har linjerna L_1 positiv lutning och L_2 har negativ lutning.

Avståndet från (x_1,y_1) till (x_2,y_2) är $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. (Pythagoras)

Räta linjens ekvation





$$\left.\begin{aligned} 0 &= kx_1 + m \Rightarrow k = -\frac{m}{x_1} \\ y_1 &= k0 + m = m \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -\frac{m}{x_1}x + y_1$$

Mer generellt för linjen ($y = kx+m$) mellan (x_1,y_1) och (x_2,y_2) så har vi att

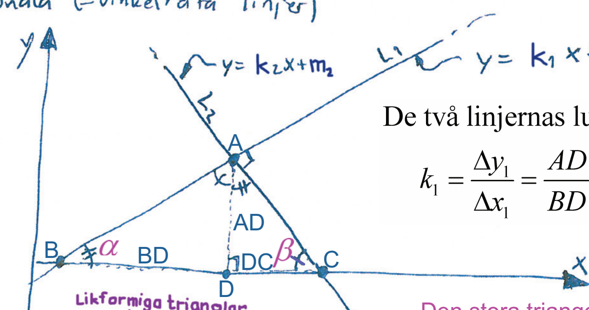
$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_2 + m \end{cases}$$

Vi kontrollerar här att k är linjens lutning, som definierad ovan.

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$$

$$\boxed{k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$ och $m = y_1 - kx_1$

Ortogonala (=vinkelräta linjer)



De två linjernas lutning är

$$k_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{AD}{BD} \text{ och } k_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_1} = \frac{-AD}{DC}.$$

Likformiga trianglar

$$k_1 = \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{\frac{AD}{DC}} = \frac{1}{-k_2} = -\frac{1}{k_2}$$

$$\boxed{\text{Alltså är } k_1k_2 = -1}$$

Den stora triangeln har två vinklar gemensama med var och en av de mindre, och därmed alla tre vinklar lika, ty vinkelsumman är 180 grader. Alltså likformiga trianglar.

8

Slutsats: $\boxed{\text{Linjerna } y = k_1x + m_1 \text{ och } y = k_2x + m_2 \text{ är ortogonala om } k_1k_2 = -1, \text{ parallella om } k_1 = k_2}$

P2, 32

Bestäm ekvationen för en linje genom $P = (-2, 2)$ som är
a) Parallell med linjen $L_1: 2x + y = 4$
b) vinkelrät mot linjen L_1

L_1: $y = -2x + 4$, lutning $k_1 = -2$

a) L_2 har lutning -2 och ekvation $y = -2x + m_2$

sätt in $(x,y) = (-2,2)$: $2 = -2(-2) + m_2$

$2 = 4 + m_2$

$m_2 = -2$

SVAR: $y = -2x - 2$

b) $-1 = k_1k_2 = -2k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + m_2$

sätt in $(x,y) = (-2,2)$: $2 = \frac{1}{2}(-2) + m_2 = -1 + m_2$

$m_2 = 3$

SVAR: $y = \frac{1}{2}x + 3$

Formelsamling M0047M

1. Aritmetisk och geometrisk summa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \quad a_k = a_{k-1} + d.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \begin{cases} n, & r = 1, \\ \frac{r^n - 1}{r - 1}, & r \neq 1. \end{cases}$$

Derivator...

(Ej utdelad men fick fråga om denna.)

1.6
$$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ (x^2+y^3)(x+y^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 & (1) \\ x^2+y^3=0 & (2)\end{cases}}_{A} \text{ eller } \underbrace{\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 & (1) \\ x+y^3=0 & (3)\end{cases}}_{B}$$

A: $(2) \Leftrightarrow \quad x^2 = -y^3 = (-y)^3 \Leftrightarrow x = \pm((-y)^3)^{\frac{1}{2}} = \pm(-y)^{\frac{3}{2}}$ insättes i (1).

Krävs här att $y \le 0$ eftersom $x^2 \ge 0$.

$$(-y)^3 \mp (-y)^{\frac{3}{2}} \cdot y - 20y^2 = 0$$
$$(-y)^3 \pm (-y)^{\frac{3}{2}} \cdot (-y) - 20y^2 = 0$$
$$(-y)^3 \pm (-y)^{\frac{5}{2}} - 20(-y)^2 = 0 \qquad \text{kan förkorta med } (-y)^2 \text{ om } y \neq 0$$

$\boxed{\begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}}$ eller $(-y) + (-y)^{\frac{1}{2}} - 20 = 0$ sätt $u = \underbrace{(-y)^{\frac{1}{2}}}_{\ge 0} \Rightarrow -y = u^2 \Leftrightarrow y = -u^2$

$$u^2 + u - 20 = 0$$
$$u = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+20} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{80}{4}} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$\boxed{u=-5}$ eller $u = 4$

Falsk lösning

$\boxed{\begin{matrix} y=-16 \\ x = 16^{3/2} = 4^3 = 64 \end{matrix}}$

eller $(-y) - (-y)^{\frac{1}{2}} - 20 = 0$ sätt $u = \underbrace{(-y)^{\frac{1}{2}}}_{\ge 0} \Rightarrow -y = u^2 \Leftrightarrow y = -u^2$

$$u^2 - u - 20 = 0$$
$$u = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+20} = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$\boxed{u=-4}$ eller $u=5$

Falsk lösning

$\boxed{\begin{matrix} y=-25 \\ x = -25^{\frac{3}{2}} = -5^3 = 125 \end{matrix}}$

samma!

B: $(3) \Leftrightarrow \quad x = -y^3 = (-y)^3$ insättes i (1).

$$(-y)^6 - (-y)^3 \cdot y - 20y^2 = 0$$
$$(-y)^6 + (-y)^4 - 20(-y)^2 = 0$$

$-y = 0$ eller $(-y)^4 + (-y)^2 - 20 = 0$ sätt $u = \underbrace{(-y)^2}_{\ge 0} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{u}$

$$u^2 + u - 20 = 0$$
$$u = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+20} = \frac{-1 \pm 9}{2} = 4$$

$\boxed{\begin{matrix} y=2 \\ x=-8 \end{matrix}}$ eller $\boxed{\begin{matrix} y=-2 \\ x=8 \end{matrix}}$

SVAR:

$\boxed{x=y=0 \text{ eller } \begin{cases} x=64 \\ y=-16 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x=125 \\ y=-25 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x=-8 \\ y=2 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x=8 \\ y=-2 \end{cases}}$

Triangelolikheten

$$|a-b| = \begin{cases} a-b \le |a|-b \le |a|+|b| & \text{om } a-b \ge 0 \\ b-a \le |b|-a \le |b|+|a| & \text{om } a-b < 0 \end{cases}$$

Alltså: $\boxed{|a-b| \le |a|+|b|}$

Utdelad uppgift tidigare år:

Uppg. P1.45 Skall visas: $|a-b| \ge ||a|-|b||$

$$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b| \qquad\qquad |b| = |(b-a)+a| \le \overbrace{|b-a|}^{=|a-b|} + |a|$$
$$|a| - |b| \le |a-b| \qquad\qquad |b| - |a| \le |a-b|$$

Eftersom $||a|-|b|| = \begin{cases} |a|-|b| & \text{om } |a|-|b| \ge 0 \\ |b|-|a| & \text{om } |a|-|b| < 0 \end{cases}$ så följer att

$$\boxed{||a|-|b|| \le |a-b|}$$

V.S.V.

Lektion 3: Kvadratiska ekvationer. Funktioner och grafer. ①
(Adams avsnitt P3-P4)

Cirkelns ekvation

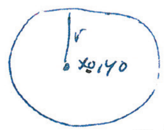
En cirkel med radie r och centrum i (x_0, y_0) består av alla punkter (x,y) som ligger på avstånd r från (x_0,y_0), dvs

$$\sqrt{\underbrace{(y-y_0)^2}_{\Delta y} + \underbrace{(x-x_0)^2}_{\Delta x}} = r$$

$$\boxed{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2 = r^2}$$

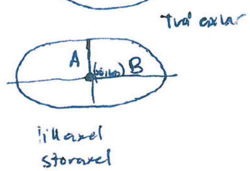
$$\Updownarrow$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{r^2} + \frac{(x-x_0)^2}{r^2} = 1$$



Ellipsens ekvation

$$\frac{(y-y_0)^2}{A^2} + \frac{(x-x_0)^2}{B^2} = 1$$



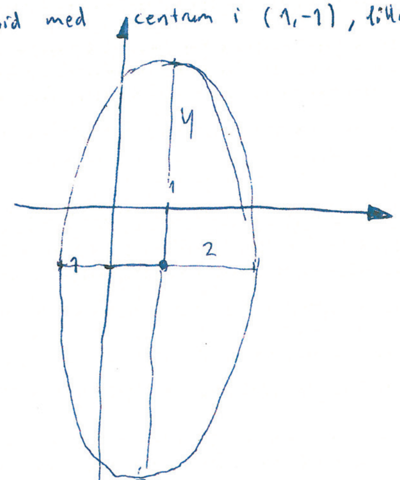
Ex: P3.46

$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 4 \qquad y-(-1)$$

Skriv om på standardform

$$\frac{(x-1)^2}{\underset{2^2}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\underset{4^2}{16}} = 1$$

Ellipsoid med centrum i $(1,-1)$, lillaxel 2 (i x-led) och storaxel 4



② P3.8 $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$ Kvadratkomplettering!

$$x^2 - 2x + 1 + \left(y^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{4} = 0$$

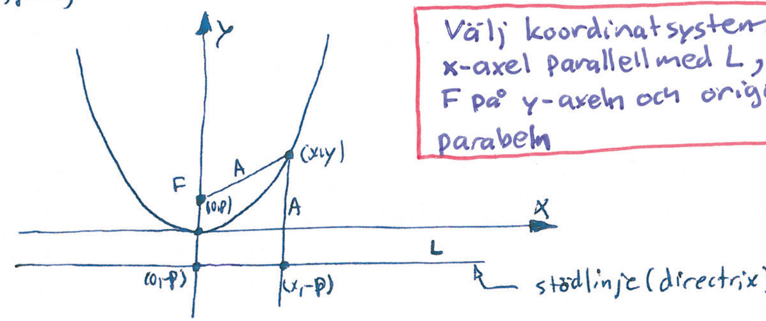
$$(x-1)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

cirkel med centrum i $(1, \frac{1}{2})$ och radie $\frac{1}{2}$

Det finns ytterligare två sorters kvadratiska ekvationer: parabel resp. hyperbel.

Parabel

Kan beskrivas som kurvor av punkter som alla har samma avstånd till en punkt F (fokus) som till en given linje L som ej går genom F. (Fysikaliskt ursprung s. 20 och kap 8.1 i boken)



Välj koordinatsystem med x-axel parallell med L, F på y-axeln och origo på parabeln

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = A = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2yp + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} + 2yp + \cancel{p^2}$$

$$x^2 = 4yp$$

Parabel med fokus i $(0,p)$ och stödlinje $x=-p$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4p}}$$

Ex $x^2 + y^2 < 2x - 2y$

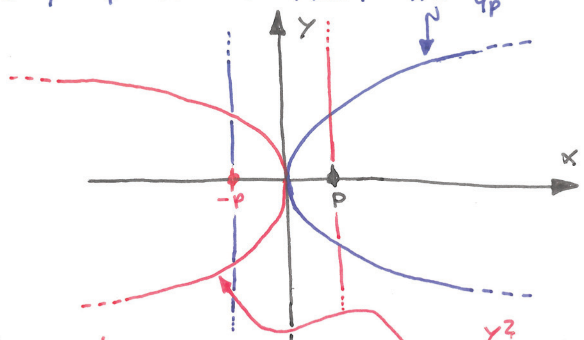
$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 2y + 1) - 1 < 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 < 2$$

Cirkelskivan bestående av alla punkter på avstånd < 2 från $(1,-1)$.

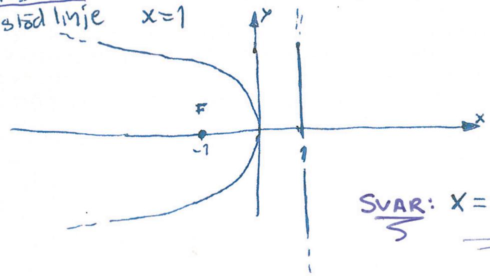
③

Byt x mot y för en parabel med fokus i $(p,0)$, stödlinje $y=-p$ och ekvation $x=\frac{y^2}{4p}$



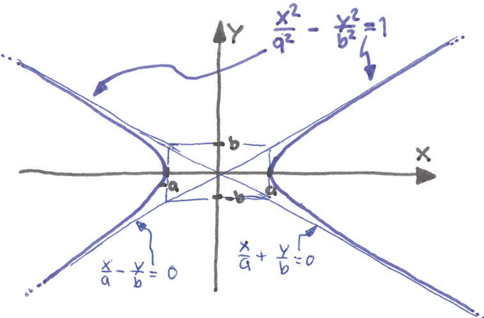
Spegling i y-axeln ger en parabel $x=-\frac{y^2}{p}$ med fokus i $(-p,0)$ och stödlinje $y=p$

Uppg. P.3.24 Hitta ekv. till parabel med fokus i $(-1,0)$ och stödlinje $x=1$



SVAR: $X=\frac{y^2}{4\cdot(-1)}=-\frac{y^2}{4}$

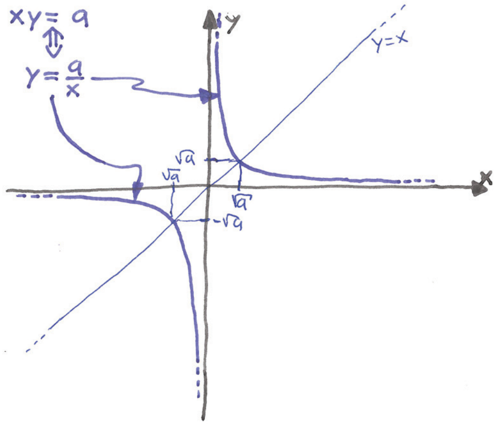
Hyperbel (sid 22 i Calculus-boken)



$xy=a$

$\Updownarrow$

$y=\frac{a}{x}$



④

P4: Funktioner och grafer

> En funktion f med definitionsmängd D är en regel som parar ihop varje x i D med ett unikt $y=f(x)$
>
> domain

Ex: $y=\sin(x)$, $D=\mathbb{R}$

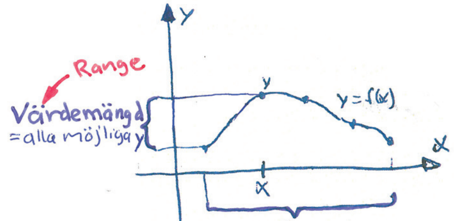
$y=ax^2+bx+C$, $D=\mathbb{R}$

$y=\sqrt{x}$, $D=[0,\infty)$ $\quad 0\leq x<\infty$

$y=-\sqrt{x}$ $\quad D=[0,\infty)$

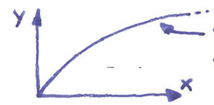
Däremot är $y=\pm\sqrt{x}$ inte en funktion!
(Eftersom funktioner måste ha exakt ett y-värde för varje x i D.)

Man kan då rita en graf

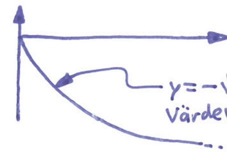


D, definitionsmängd

Ex:

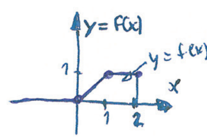


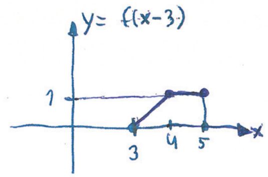
$y=\sqrt{x}$, $D=[0,\infty)$
Värdemängd $[0,\infty)$

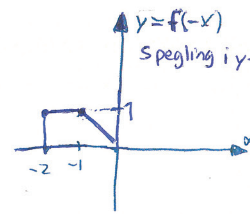


$y=-\sqrt{x}$, $D=[0,\infty)$
Värdemängd $(-\infty,0]$

Ta även exempel från sid ⑤ här.





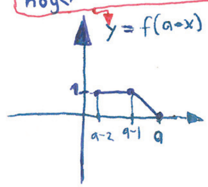


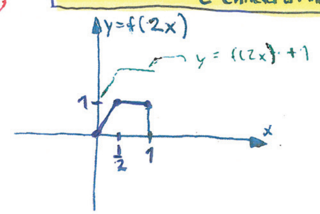
Kan även ses som
$y=f(a-x)=f(-(x-a))$,
dvs grafen för $y=f(-x)$
förflyttad a längdenheter åt höger

Allmänt:

$f(x-c)=$ f förflyttad c enheter åt höger

$f(ax)=$ f "hoptryckt" till $\frac{1}{a}\cdot$(ursprungliga bredden) $(a>0)$





$f(x)+c=$ f förflyttad c enheter uppåt.

Ex: Bestäm värdemängd och definitionsmängd ⑤
för $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x}}$.

Definitionsmängd: $3+x>0 \iff \underline{\underline{x>-3}}$ så $D=(-3,\infty)$

(Annars division med 0 eller roten ur något negativt.)

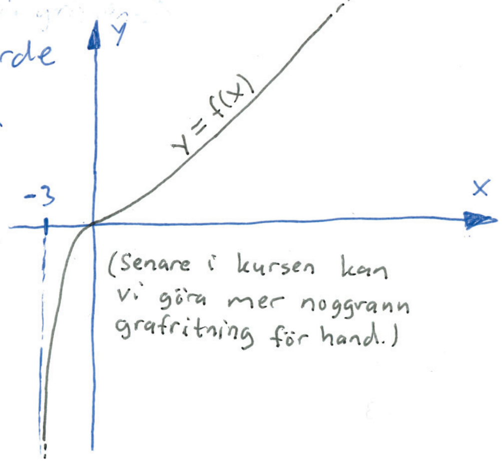
Försöker man använda ekvationslösning för att avgöra för vilka $y \in \mathbb{R}$ det finns $x \in D=(-3,\infty)$ sådana att $y=f(x)$ så blir det ett **ganska** bökigt sätt att bestämma definitionsmängden.
Istället resonerar vi oss fram till ungefär hur funktionens graf måste se ut. (När vi gått igenom gränsvärden, kontinuerliga funktioner, asymptoter och grafritning senare i kursen blir följande med lite annan terminologi en naturlig standardapproach för att snabbt avgöra värdemängden.)

- Väljer vi $x \in D$ väldigt nära -3 så får vi täljare väldigt nära -3 och nämnare väldigt nära 0 i $f(x)$, och om x avtar mot -3 så borde $f(x)$ vara negativt och avta obegränsat mot $-\infty$.
- $f(0)=0$
- För riktigt stora x är $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{3+x}} \approx \sqrt{\frac{x^2}{x}} = x$,

  försumbar för riktigt stora x

  så $f(x)$ växer obegränsat mot ∞ med växande x.

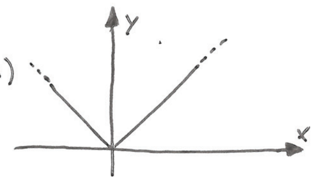
Så grafen för x borde se ut ungefär som till höger, vilket ger värdemängd $V=\mathbb{R}$

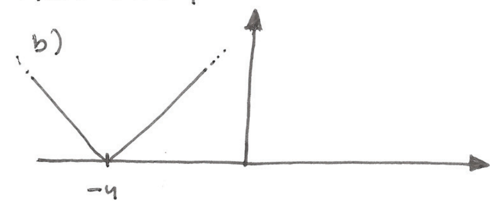


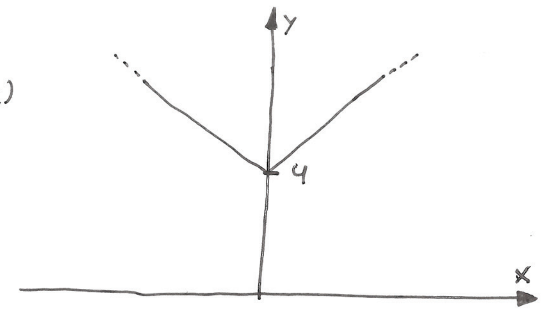
(Senare i kursen kan vi göra mer noggrann grafritning för hand.)

$\boxed{\text{SVAR: } D=(-3,\infty),\ V=\mathbb{R}}$

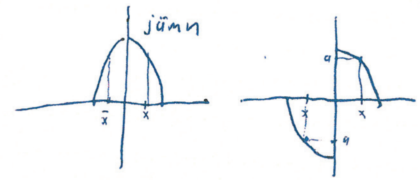
⑥ Ex Skissa grafen för a) $f(x)=|x|$, b) $g(x)=|x+4|$, c) $h(x)=|x|+4$

a)


b)


c)


En funktion kallas $\underline{\text{jämn}}$ om $f(-x)=f(x)$
$\underline{\text{udda}}$ om $f(-x)=-f(x)$



Ex $f(x)=x^2$ är jämn, ty $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
$g(x)=x^3+x$ är udda, ty $g(-x)=(-x)^3-x=-x^3-x=$
$=-(x^3+x)=-g(x)$.

Lektion 4: Sammansättningar av funktioner. Polynom och rationella funktioner
(Adams avsnitt P5-P6)

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{där } g(x)\neq 0.$$

För två funktioner f och g skriver vi $f\circ g$ för den sammansatta funktionen $f\circ g(x) = f(g(x))$

Ex $\begin{cases} f(x) = \sin(x) \\ g(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f\circ g(x) = \sin(x^2) \\ g\circ f(x) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x) \end{matrix}$

Ex Om $f(x) = \sqrt{1-x}$ och $g(x) = \sqrt{1+x}$ så är

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}.$$ Definierad för

$$1-x \geq 0 \quad \text{och} \quad 1+x > 0$$

$$1 \geq x \quad \text{och} \quad x > -1$$

Alltså har $\frac{f}{g}$ definitionsmängd $-1 < x \leq 1$.

Ex Om $f(x) = \frac{2}{x}$ och $g(x) = \frac{x}{1-x}$ så är

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{2}{\frac{x}{1-x}} = \dfrac{2(1-x)}{x} = 2\left(\frac{1}{x}-1\right)$

  Definitionsmängd: $x\neq 1$ och $x\neq 0$

Efter förenkling fås en funktion som är definierad för $x=1$, men $g(1)$ är ej definierad och därför ej heller $f(g(1))$. (Se förklaring på rad 1-5, sid 36 i Calculus-boken.)

- $(g\circ f)(x) = \dfrac{\frac{2}{x}\cdot x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdot x} = \dfrac{2}{x-2}$

  Definitionsmängd: $x\neq 0$ och $x\neq 2$

... och samma här.

① ② **Polynom**

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n, \quad N = \text{gradtal (förutsatt att } a_N\neq 0)$$

Om $P(x_0)=0$ så kallas x_0 en rot (eller ett nollställe) för polynomet och då gäller att $P(x) = (x-x_0)\cdot q(x)$ där $q(x)$ är ett annat polynom och $q(x) = \dfrac{P(x)}{x-x_0}$

Ex $P(x) = x^3-x^2-x+1$, prövning ger: $x=-1$ nollställe

Alltså är $P(x) = (x-(-1))\,q(x)$, $q(x) = \dfrac{P(x)}{x+1}$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
x+1 & x^3 - x^2 - x + 1 \\
 & -(x^3 + x^2) \\
 & -2x^2 \quad\quad + 1 \\
 & -(-2x^2 - 2x) \\
 & x + 1 \\
 & -(x+1) \\
 & 0
\end{array}$$

$$P(x) = (x+1)\underbrace{(x^2-2x+1)}_{q(x)} = (x+1)(x-1)^2$$

Ex: $x^4 - 2x^2 + 1 \overset{\text{sätt } u=x^2}{=} u^2-2u+1 = (u-1)^2 = (x^2-1)^2$

$$= ((x-1)\cdot(x+1))^2 = (x-1)^2(x+1)^2$$

Ex: Ange definitionsmängden för $f(x) = \dfrac{x^7+3x^5+4}{x^4-2x^2+1}$

Från förra exemplet får vi att

$$f(x) = \frac{x^7+3x^5+4}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Definitionsmängd: $x\neq 1$ och $x\neq -1$

Polynom av grad n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \,, \quad a_n \neq 0$$

Ex: $(x-1)(x+1) - (x-1)^2 = x^2 - 1 - (x^2 - 2x + 1) = \cancel{x^2} \cancel{-1} \cancel{-x^2} + 2x \cancel{-1}$
är polynom av grad 1.

Rationell funktion = kvot mellan två polynom

Ex: $\dfrac{x^7 + 5x^3 + 1}{x^3 - 1}$

Ex: $1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x}{1+x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2+x}{1+x}$

Polynomdivision: Räkna ut $\dfrac{x^4 + 4x^2 + 7}{x^2 + 1}$:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \qquad\qquad + 3 \quad \leftarrow \text{kvot} \\ \hline x^2+1 & x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 0x + 7 \\ & -(x^4 \qquad + x^2) \\ \hline & \qquad 3x^2 \qquad + 7 \\ & -(3x^2 \qquad + 3) \\ \hline & \qquad\qquad 4 \leftarrow \text{rest} \end{array}$$

Innebär att $\dfrac{x^4 + 4x^2 + 7}{x^2 + 1} = x^2 + 3 + \dfrac{4}{x^2+1}$

(Förklaras på sid 36.)

Faktorsatsen

För ett polynom $p(x)$ är $p(a) = 0$ om och endast om

$p(x) = (x-a)\, q(x)$ för något polynom $q(x)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{q(x) = \frac{p(x)}{x-a}}$$

Kan användas för att lösa tredjegradsekvation.

Ex: Lös $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Prövning ger att $x=1$ är ett nollställe, dvs

$p(x) = (x-1)\, q(x)$, där $q(x) = \dfrac{p(x)}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 5x + 6 \\ \hline x-1 & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ & -(x^3 - x^2) \\ \hline & \quad -5x^2 + 11x - 6 \\ & -(-5x^2 + 5x \quad) \\ \hline & \qquad\quad 6x - 6 \\ & \quad -(6x - 6) \\ \hline & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Alltså $p(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$ om $x = 1$ eller om

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} =$$

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x = 2$ eller $x = 3$

SVAR: Nollställen $x=1$, $x=2$ och $x=3$, vilket även innebär att $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

M0047M Lektion 5: Matlab-demo

Table of Contents

Exempel på syntax

Några enkla exempel från Johans inspelade föreläsning 5:

```
Ex1 = 7 + 8/2 + sin(pi/4) - sqrt(63.5^3)

format compact % ger lite mer kompakta utskrifter (färre tomma rader)
format long    % ger fler decimaler i utskrifer i kommandofönstret

Ex2 = exp(cos(3*pi/5)^2) - log(abs(tan(3/2)))
```

```
Ex1 =
       -494.3
Ex2 =
  -1.546076024393806
```

Skriv till exempel `doc log` i kommandofönstret för manualsida med mer info om `log`-lommandot.

```
x = 54.3; % Semikolon för att inte skriva ut värdet på x
y = 37.6; % Decimalpunkt, inte decimalkomma.
z = 4*x^2 - x*y^3

format shortG % Tillbaka till 5 decimaler
```

```
z =
    -2.874651556800000e+06
```

Vektorer

```
v1 = [3 5 6 1]
v2 = 1:4
v3 = 0:1.1:3.3

v4 = v1.^2  % Elementvis kvadrering
v5 = v1.*v2 % Elementvis multiplikation

% Fungerar även med komplexa tal (som återkommer M0049M)
vK = [i 2 3 4]
vKSquared = vK.^2
```



```
% transponering
vKT = vK.' % Transponering från radvektor till kolumnvektor
vkH = vK'  % Komplexkonjugat och transponering
```

```
v1 =
     3     5     6     1
v2 =
     1     2     3     4
v3 =
            0          1.1          2.2          3.3
v4 =
     9    25    36     1
v5 =
     3    10    18     4
vK =
  Columns 1 through 2
            0 +          1i             2 +          0i
  Columns 3 through 4
            3 +          0i             4 +          0i
vKSquared =
    -1     4     9    16
vKT =
            0 +          1i
            2 +          0i
            3 +          0i
            4 +          0i
vkH =
            0 -          1i
            2 +          0i
            3 +          0i
            4 +          0i
```

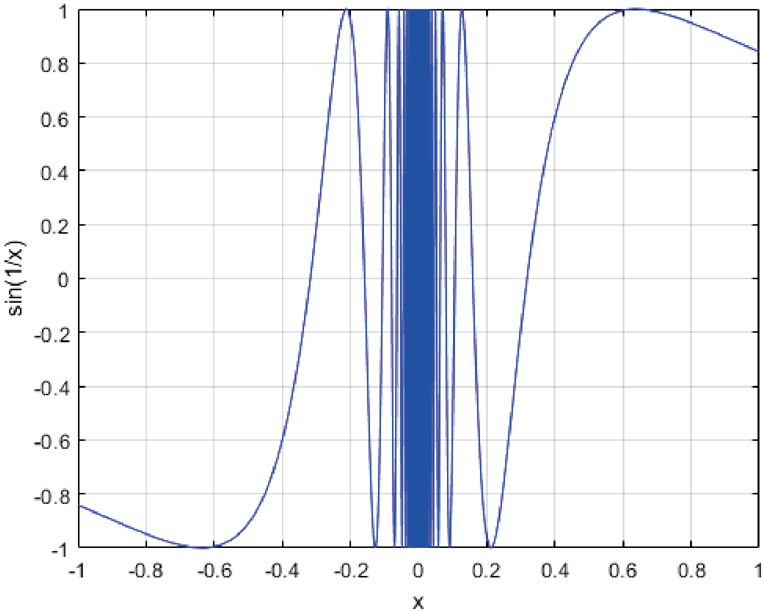
Plotta grafer

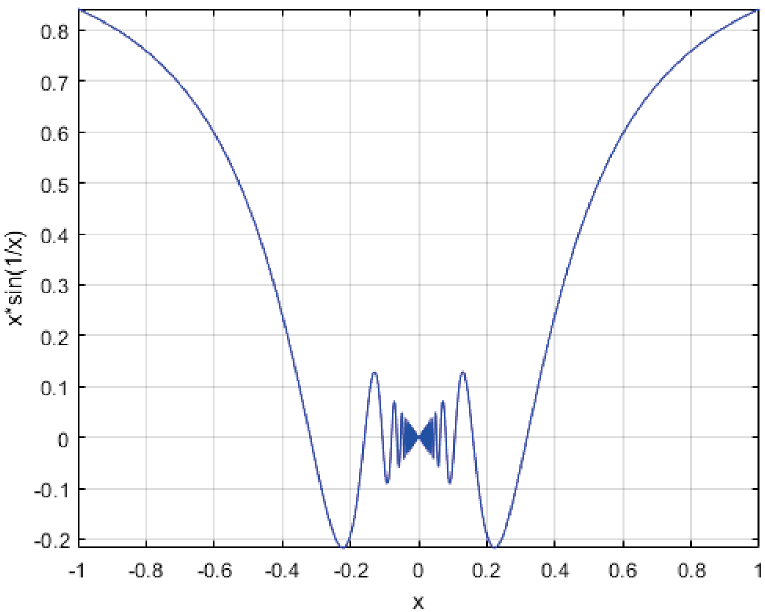
Vi plottar grafen för $y = \sin(1/x)$ och för $y = x\sin(1/x)$ på intervallet $-1 \le x \le 1$.

```
x = linspace(-1,1,100000);
y = sin(1./x);
y2 = x.*y; % = x.*sin(1./x)

figure(1) % Öppna nytt figurfönster för Figur 1
plot(x,y,'b-'); % doc plot för mer info och exempel för plot-kommandot
grid on
xlabel('x')
ylabel('sin(1/x)')

figure(2)
plot(x,y2,'b-');
grid on
xlabel('x')
ylabel('x*sin(1/x)')
axis tight % Justera axlar så att grafen fyller hela fönstret
```



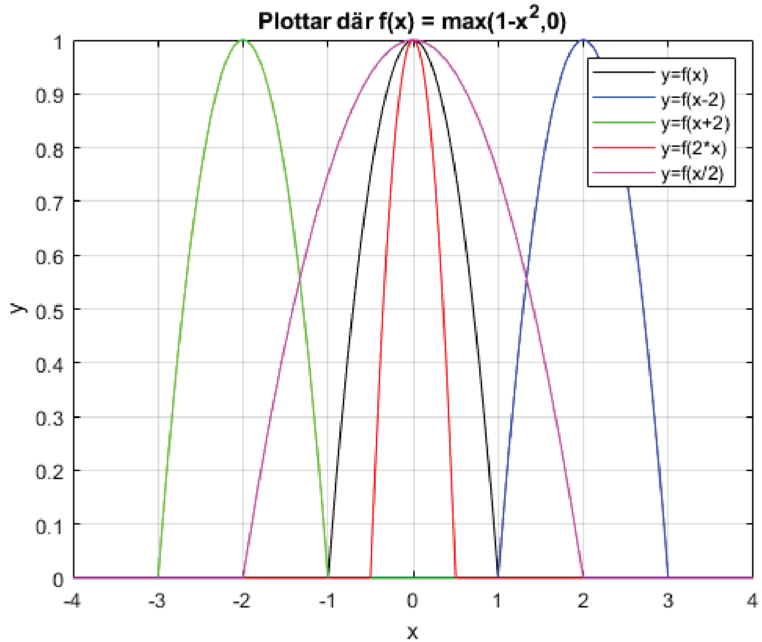


Flera grafer i samma figur

```
clear all % Radera alla variabler ovan

% Enklaste sättet att definiera en funktion f(x) Matlab:
f = @(x) max(1-x.^2,0); % .^ för att även tillåta att x är en vektor

x = linspace(-4,4,1000);
figure(3)
% Skriv 'doc plot' i kommandofönstret om ni vill ha mer detaljerad
% information om olika sätt att använda kommandot och till exempel vilka
% färger och linjetyper som är tillgängliga med notation som nedan.
plot(x,f(x),'k-',x,f(x-2),'b-',x,f(x+2),'g-',x,f(2*x),'r-',x,f(x/2),'m-')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Plottar där f(x) = max(1-x^2,0)')
legend('y=f(x)', 'y=f(x-2)','y=f(x+2)','y=f(2*x)','y=f(x/2)')
grid on
```



Bestäm lokala max/min

Vi provar att numeriskt bestämma minsta värdet, lokalt maximum och ett nollställe för följande funktion

```
clear all
```

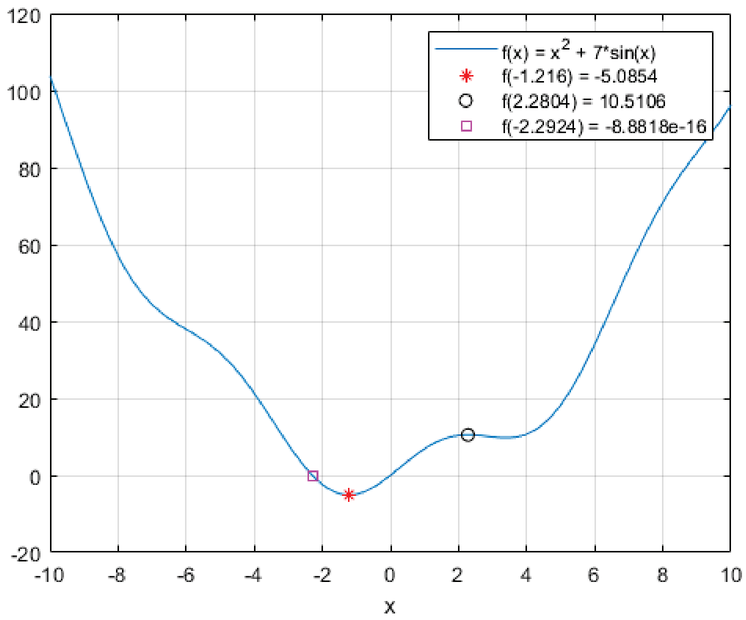
```
f = @(x) x.^2 + 7*sin(x);

x = linspace(-10,10,1000);
figure(4)
plot(x, f(x))
grid on
xlabel('x')
% Minsta värde för något x mellan -2 och 0
xMin = fminbnd(f,-2,0);  % För mer info: 'doc fminbnd' i kommandofönstret
yMin = f(xMin);
hold on % Radera ej plottad graf när vi anropar plot på nästa rad
plot(xMin,yMin,'r*')

% Det finns inget kommando fmaxbnd, men vi kan hitta lokalt max som följer:
minusf = @(x) -f(x)
xMax = fminbnd(minusf,1,3),
yMax = f(xMax); % Lokalt max
plot(xMax,yMax,'ko')

% På liknade sätt kan vi hitta nollstället närmast x=-2:
xZro = fzero(f,-2),
yZro = f(xZro);
plot(xZro,yZro,'ms')
hold off
legend('f(x) = x^2 + 7*sin(x)', ...
       ['f(' num2str(xMin) ') = ' num2str(yMin)], ...
       ['f(' num2str(xMax) ') = ' num2str(yMax)], ...
       ['f(' num2str(xZro) ') = ' num2str(yZro)])
```

```
minusf =
  function_handle with value:
    @(x)-f(x)
xMax =
       2.2804
xZro =
      -2.2924
```

Summera de hundra första positiva heltalen

Vi demonstrerar hur man kan göra detta med respektive utan en for-loop. När något går att göra både med och utan for-loop i Matlab, så är i allmänhet for-loop det långsammare lösningen

```
tic % Starta tidtagning
s = 0;
for n = 1:100
  s = s + n; % Semikolon för att _inte_ skriva ut 100 delresultat!
end
T = toc; % = antal sekunder sedan tic-kommandot
disp(['Summan av de hundra första positiva heltalen är ' int2str(s) '.'])
disp(['Beräkningen tog ' num2str(1e6*T) ' mikrosekunder med for-loop.'])

% Samma beräkning utan for-loop:
tic
s = sum(1:100);
T = toc;
disp(['Summan av de hundra första positiva heltalen är ' int2str(s) '.'])
disp(['Beräkningen tog ' num2str(1e6*T) ' mikrosekunder utan for-loop.'])
```

```
Summan av de hundra första positiva heltalen är 5050.
Beräkningen tog 270.7 mikrosekunder med for-loop.
Summan av de hundra första positiva heltalen är 5050.
Beräkningen tog 37 mikrosekunder utan for-loop.
```

Publicering

```
Vi kan göra en publicerad version av denna fil som inkluderar alla
utskrivna resulat och plottar genom att skriva följande kommando
i kommandofönstret:
```

```
publish('L05MatlabDemo','pdf')
```

(För snyggt resultat bör man då ej ha plotfönstrena dockade.)

Published with MATLAB® R2023a

Lektion 6 och början av 7: Trigometri (Adams avsnitt P7)

(Adams avsnitt 9.1 om Talföljder flyttat till Lektion 10)

1

Olika sätt att mäta vinklar:

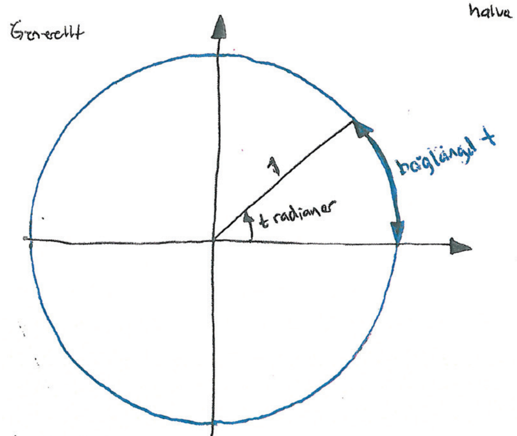
1 varv = 360° = 2π radianer

Obs: Cirkelns omkrets = $\pi \cdot$ diametern

så ~~—~~ för en cirkel med radie 1 är omkretsen = 2π = antal radianer för ett varv

halva — " — = π = antal radianer för ett halvt varv

Generellt



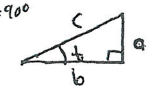
	Multiplar av 45°							
Grader	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Radianer	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	Multiplar av $\frac{\pi}{4}$							

Enhetscirkeln

För trianglar:

Allmänt

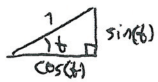
vinkel: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ rad $= 90^\circ$



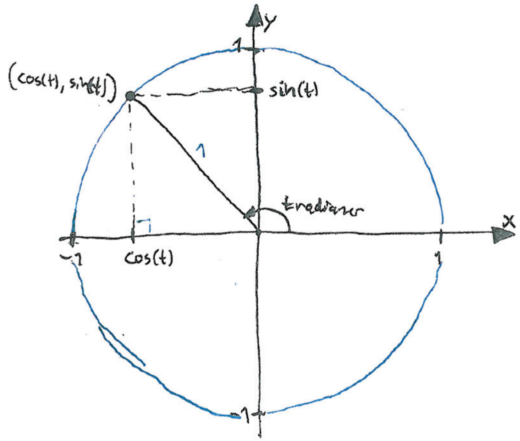
$\sin(t) = \frac{a}{c}$

$\cos(t) = \frac{b}{c}$

Specialfallet $c=1$



Mer allmänt definieras sin(t) och cos(t) som x- och y-koordinat för en punkt på enhetscirkeln

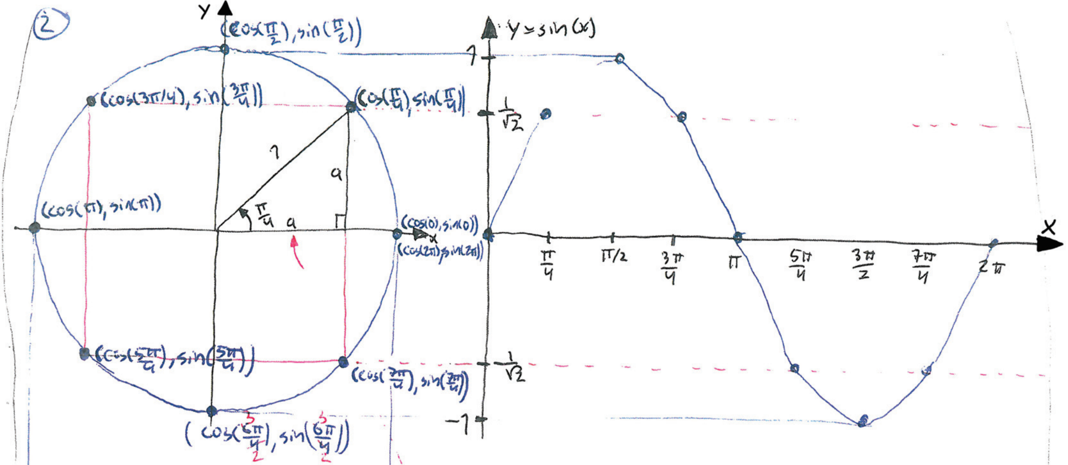


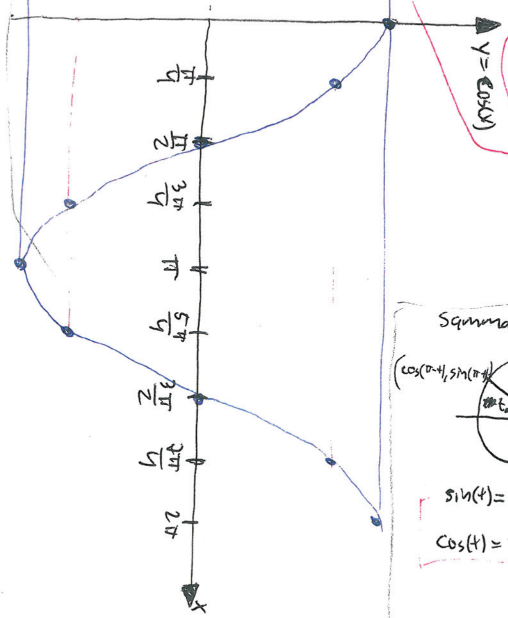
Pythagoras sats ger

$$\boxed{\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1}$$

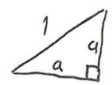
VIKTIG!

2





Pythagoras sats:



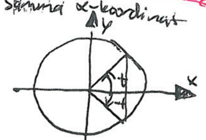
$$a^2 + a^2 = 1$$
$$2a^2 = 1$$
$$a^2 = \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$$

Samma y-koordinat

$\sin(t) = \sin(\pi - t)$

$\cos(t) = -\cos(\pi - t)$

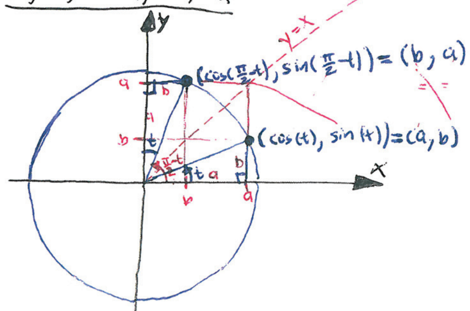
Samma x-koordinat



$\cos(t) = \cos(-t)$

$\sin(t) = -\sin(-t)$

Spegling i linjen y=x

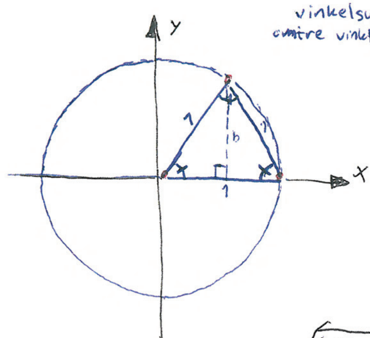


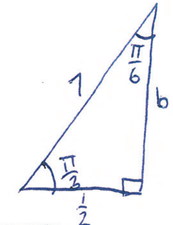
$\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t) \text{ och } \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)}$

5

vinkelsumma i triangel $= 180° = \pi$ rad

om tre vinklar lika så måste de vara $60° \hat{=} \frac{\pi}{3}$ rad $(3 \cdot 60 = 180)$





Pythagoras:

$b^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1^2$, $b > 0$

$b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

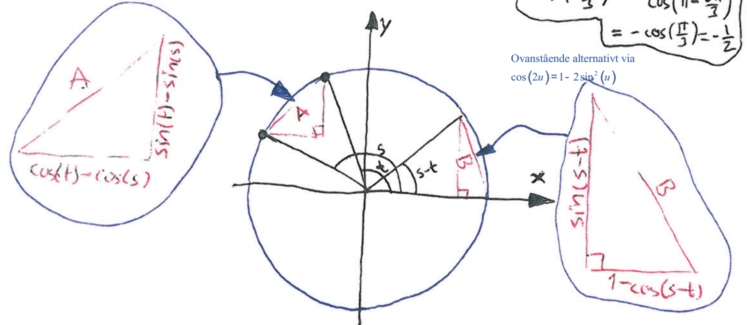
$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{1}{2}\\ \sin(\tfrac{\pi}{6}) &= \tfrac{1}{2}\\ \cos(\tfrac{\pi}{6}) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}}$$

Ger även t ex

$\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(\pi - \frac{2\pi}{3})$
$= -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

Ovanstående alternativt via $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$



$A^2 = B^2$

Pythagoras: $\underbrace{(\cos(t) - \cos(s))^2 + (\sin(t) - \sin(s))^2}_{=1} = (1 - \cos(s-t))^2 + \sin(s-t)^2$

$\cos^2(t) - 2\cos(t)\cos(s) + \cos(s)^2 + \sin^2(t) - 2\sin(t)\sin(s) + \sin^2(s) = 1 - 2\cos(s-t) + \underbrace{\cos^2(s-t) + \sin^2(s-t)}_{=1}$

$-2(+\cos(t)\cos(s) + \sin(t)\sin(s)) = -2\cos(s-t)$

$$\boxed{\cos(s-t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)}$$

⇓ sätt $u = -t$

$$\boxed{\cos(s+u) = \cos(s)\cos(+u) - \sin(s)\sin(u)}$$

sätt s=u ⇒

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(2u) &= \cos^2(u) - \sin^2(u)\\ &= 1 - 2\sin^2(u)\\ &= 2\cos^2(u) - 1\end{aligned}}$$

⇓

$$\boxed{\begin{aligned}\cos^2(u) &= \frac{1 + \cos(2u)}{2}\\ \sin^2(u) &= \frac{1 - \cos(2u)}{2}\end{aligned}}$$

$\sin(s-t) = \cos(\frac{\pi}{2} - (s-t)) = \cos((\frac{\pi}{2} - s) + t)$

$= \cos(\frac{\pi}{2} - s)\cos(t) - \sin(\frac{\pi}{2} - s)\sin(t)$

$$\boxed{\sin(s-t) = \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin(t)}$$

⇓ sätt $u = -t$

$$\boxed{\sin(s+u) = \sin(s)\cos(u) + \cos(s)\sin(u)}$$

sätt s=u ⇒

$$\boxed{\sin(2s) = 2\sin(s)\cos(s)}$$

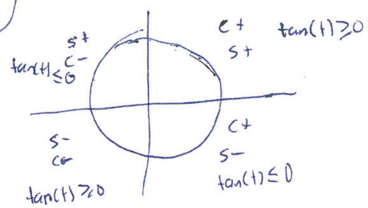
Fler räkneexempel för ovanstående på sid 5.

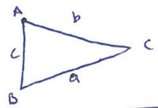
(4)

CAST ~~rule~~

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\ \cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}\end{aligned}}$$

Tecken ?

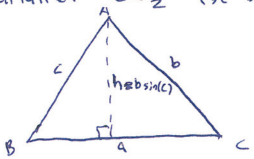




Sinussatsen : $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$

cosinussatsen : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$ (= pythagoras i specialfallet $A = \frac{\pi}{2}$)

Specialfallet $C \leq \frac{\pi}{2}$ (se boken för fler)



$c\sin(B) = h = b\sin(C) \Rightarrow \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$

$$c^2 = (b\sin(C))^2 + (a - b\cos(C))^2 = b^2\sin^2(C) + a^2 - 2ab\cos(C) + b^2\cos^2(C)$$

$$= a^2 + b^2\underbrace{(\sin^2(C) + \cos^2(C))}_{=1} - 2ab\cos(C)$$

Räkne exempel

Adams P7.15 (andra halvan) :

Kom ihåg: $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

sätt $t = \frac{x}{2}$: $\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos(x)}{2}$, $\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2}$

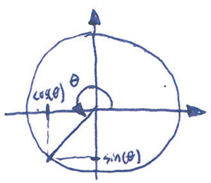
Kom ihåg: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

sätt $t = \frac{x}{2}$: $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$

$$\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{2\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{\cancel{2}\sin(\frac{x}{2})\cancel{\cos(\frac{x}{2})}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}(x/2)} = \tan(\frac{x}{2})$$

Adams P7. 30

Om $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ och $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$, vad är $\sin(\theta)$ och $\cos(\theta)$?



Givet: $\frac{1}{2} = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$\cos(\theta) = 2\sin(\theta)$

Sätt in detta i $1 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 4\sin^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 5\sin^2(\theta)$

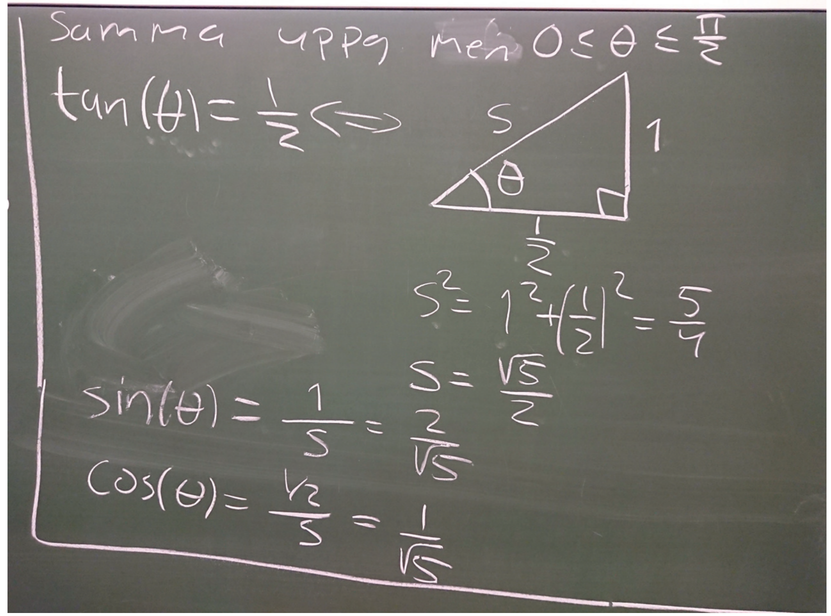
$\sin^2(\theta) = \frac{1}{5}$

$|\sin(\theta)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

SVAR: $\sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\cos(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Tillägg till Uppgift P.7.30

(5)



Formelsamling M0047M

3. Trigonometri

$$\begin{aligned}\cos(s+t) &= \cos s\cos t - \sin s\sin t,\\ \sin(s+t) &= \sin s\cos t + \cos s\sin t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},\\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A.\end{aligned}$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Sammanställning från äldre version av kursen. Nu har ni någon enstaka formel i formelbladet och övriga behöver ni antingen kunna utantill eller lära er härleda vid behov från de ni kan.

Utantillapp för $\sin x$ och $\cos x$

Sinus och cosinus för speciella vinklar

x (grader)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
x (radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Elementära räkneregler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (trigonometriska ettan)

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\quad$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Plugga in

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Härled vid behov

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$

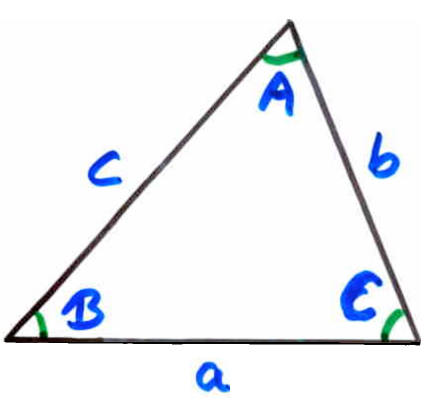
$\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$

Följande tre har vi ej tagit upp:

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x + y) + \sin(x - y)\big)$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x - y) - \cos(x + y)\big)$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x - y) + \cos(x + y)\big)$



Sinussatsen

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Cosinussatsen

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$

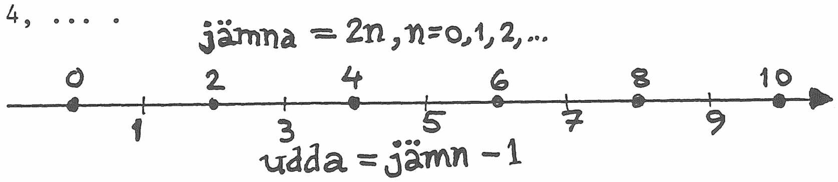
— MATEMATISK INDUKTION —

När man ska visa att ett påstående gäller för alla positiva heltal kan man inte klara sig med att experimentera. Inom t ex fysiken bevisar man saker genom att göra ett antal upprepningar av ett experiment. Men för att bevisa ett matematiskt samband för alla positiva heltal skulle krävas oändligt många experiment, och det är omöjligt att klara. Därför måste man hitta på någon typ av resonemang som är logiskt likvärdigt med oändligt många experiment.

Låt oss ta ett exempel. Bestäm ett slutet uttryck för summan av de n första positiva udda heltalen, dvs

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots}_{n \text{ stycken}} = ?$$

Allra först behöver vi ett uttryck för det n:te udda talet. Varje udda tal är närmaste granne till ett jämnt tal, och de jämna talen är ju lätta att uttrycka. Det n:te udda talet blir $2n-1$, $n= 1, 2, 3, 4, \dots$.



För att få en uppfattning om vad vi har att vänta oss gör vi några experiment och samlar resultaten i en tabell.

n	Summan tecknad	Summan uträknad
1	1	1
2	1 + 3	4
3	1 + 3 + 5	9
4	1 + 3 + 5 + 7	16
...		...
...		
p	1 + 3 + 5 + ... + (2p−1)	p^2 (RIMLIG GISSNING)
p+1	1 + 3 + 5 + ... + (2p−1) + (2p+1)	?

Det lönar sig inte att bara gissa på uttrycket i rad $p+1$. Istället resonerar vi så här. Låt oss för ett ögonblick tro på vår gissning av uttrycket på rad p . I matematisk text uttrycks detta så här:

> Antag att rad p är rätt ifylld, dvs antag att för talet p gäller $1 + 3 + 5 + \dots + (2p-1) = p^2$.

För att komma till det tecknade uttrycket på rad $p+1$ så ska vi bara lägga till $(2p+1)$. I kolumnen "Summan uträknad" kan vi då också lägga till samma sak $(2p+1)$ och räkna ut vad vi får:

$$p^2 + (2p+1) = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 .$$

Alltså kan vi dra slutsatsen att om rad p är rätt ifylld då kommer rad $p+1$ att följa samma mönster. Och nu har vi det resonemang som vi efterlyste, för vi kan börja med rad 1 och konstatera att den ju är rätt ifylld. Då måste nästa rad också vara rätt ifylld. Så utgår vi från rad 2 , som vi vet är rätt ifylld, och kan komma vidare till rad 3 , därifrån till rad 4 , så till rad 5 , rad 6 , etc, eftersom vi för varje rad kan utnyttja det allmänna resonemanget om raderna p och $p+1$. Slutsatsen blir: För alla positiva heltal n gäller

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 .$$

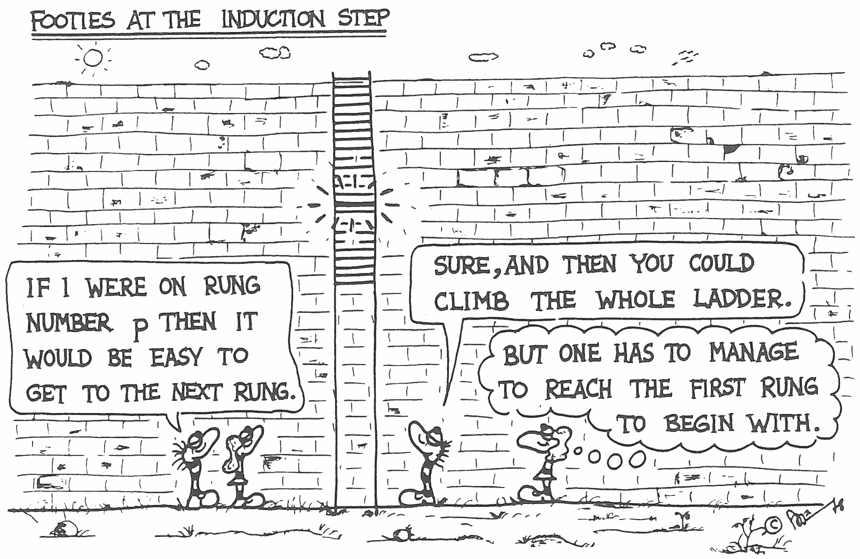
Induktionsaxiomet

Låt P_n vara ett påstående som beror av heltalet n . Påståendet P_n är sant för alla heltal $n \geq 1$ om

1) P_1 är sant, dvs påståendet är sant för $n = 1$;
2) $P_p \Rightarrow P_{p+1}$, dvs om påståendet är sant för ett visst $n = p$ så är det sant också för $n = p+1$.

Anm Villkoret 1) kunde ha formulerats mer allmänt:
1) P_m är sant, dvs påståendet är sant för $n = m$.
Slutsatsen blir då att P_n gäller för alla $n \geq m$.

Engelsk läs-övning



Andrejs Dunkels, University of Lulea, Lulea, Sweden.

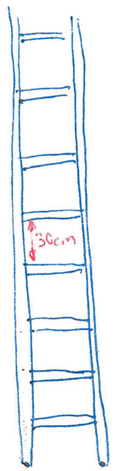
Några övningsuppgifter

1. Bestäm summan av de n först positiva jämna heltalen.
2. Gissa ett rimligt uttryck för summan
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} , \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$
med hjälp av numeriska experiment och bevisa sedan att gissningen är riktig med induktion.
3. Bestäm ett slutet uttryck för summan
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots \text{ (n stycken termer)}$$
och genomför induktionsbevis.
4. Bestäm ett slutet uttryck för $1 - 3 + 5 - 7 + \dots$ (n termer) .
5. Bestäm ett slutet uttryck för
$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$
och bevisa alla gissningar (förmodanden, antaganden, o dyl) med matematisk induktion.

Lektion 7-8: Induktion (Derivator, integraler och sånt ... Avsnitt 1.10) 1

Idag skall jag gå igenom en bevismetod som kallas induktion och som kan vara användbar när man vill visa att något är sant för alla heltal (eller alla heltal $\geq n_0$ eller alla heltal $\leq n_0$).

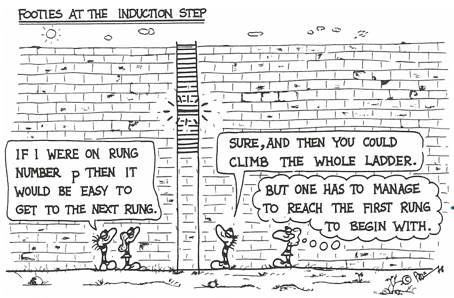
Lite mer vardagligt exempel: Antag att ni vill sälja en jättelång stege till någon som vill upp på ett högt tak, och för att få till en affär måste ni på något sätt övertyga personen om att han/hon klarar att klättra uppför hela stegen.



För att spara lite tid och inte köra en separat diskussion om varje pinne på stegen skulle ni dela upp argumentationen i tre steg:

1) Det är 30 cm upp till pinnen. Det klarar du lätt!

2) Det är samma avstånd mellan pinnarna, så om du står på pinne nummer n så är det aldrig mer än 30 cm upp till pinne nummer $n+1$ och det klarar du, dvs då kan du ta dig även till pinne nummer $n+1$.



3) Sunt förnuft $\Rightarrow$ du kan ta dig alla stegen uppför hela stegen.

Exakt den bevistekniken skall jag nu återanvända i andra sammanhang, fast det jag kallade sunt förnuft i 3) är i det här fallet en såpass användbar form av sunt förnuft att det fått ett eget namn: Induktionsaxiomet!

2 1.35 c)

Skall bevisa påståendet

$$\boxed{P_n: \ 1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\dots+n(n+3) = \tfrac{1}{3}n\underbrace{(n+1)(n+5)}_{=n^2+5n+n+5=n^2+6n+5}, \ n\in\mathbb{Z}_+}$$

Positiva heltalen

$$P_n: \ \sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n^3+6n^2+5n}{3}$$

Bevissteg:

Steg 1) Visa att P_1 är sant

Steg 2) Visa att om P_n är sant så följer att P_{n+1} är sant

Steg 3) Induktionsaxiomet $\Rightarrow$ P_n sant för alla positiva heltal!

Steg 1: För $n=1$ så är VL i P_1 $\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = 1\cdot4 = 4$ och HL i P_1 är $\frac{1+6+5}{3} = \frac{12}{3} = 4$ $\Big\} \Rightarrow$ P_1 sant!

Steg 2: Antag att P_n är sant, dvs att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n^2+6n+5}{3}.$$

VL i P_{n+1} blir då

$$(n+1)\cdot(n+4)+\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = (n+1)\cdot(n+4) + \frac{n^3+6n^2+5n}{3}$$

$$= n^2+\overbrace{4n+n}^{5n}+4 + \frac{n^3+6n^2+5n}{3} =$$

$$= \frac{3n^2+15n+12+n^3+6n^2+5n}{3} = \frac{n^3+9n^2+20n+12}{3}$$

HL i P_{n+1} är $\frac{(n+1)^3+6(n+1)^2+5(n+1)}{3} = \frac{n^3+3n^2+3n+1+6n^2+12n+6+5n+5}{3}$

$$= \frac{n^3+9n^2+20n+12}{3}$$

Alltså: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Steg 3: Induktionsaxiomet ger att P_n är sant för alla n.

Skall visas:

1.41 $P_n: \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot k! < n \cdot (n+1)!$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n+1$

(3)

Är P_1 sant?

$$VL = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot k! = 1^2 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1$$

$$HL = 1 \cdot (1+1)! = 1 \cdot 1 \cdot 2 > VL$$

$\Rightarrow$ P_1 sant! (1)

Antag att P_n är sant, $\overbrace{n \geq 1}^{\text{för något}}$.

Behöver visa att då är P_{n+1} sant.

$$VL = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \cdot k! = (n+1)^2 (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot k!$$

$$< (n+1)^2 \cdot (n+1)! + n \cdot (n+1)! = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)!}{(n+2)} + \frac{n \cdot (n+2)!}{n+2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 + n}{n+2} (n+2)! = \frac{n^2 + 2n + 1 + n}{n+2} (n+2)!$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 1}{n+2} (n+2)! < \frac{(n+2)(n+1)}{n+2} (n+2)!$$

$\frac{n^2+3n+1}{n+2} \overset{?}{<} n+1$

$n^2 + 3n + 1 \overset{?}{<} (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$

$$HL = (n+1) \cdot (n+2)! > VL$$

Alltså har vi visat att $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (2)

(1), (2) och Induktionsaxiomet ger att P_n är sant för alla positiva heltal n!

Enklare att skriva om HL än att faktorisera VL:

$$VL = \ldots < (n+1)^2 \cdot (n+1)! + n \cdot (n+1)! = \left((n+1)^2 + n \right)(n+1)! = (n^2 + 3n + 1) \cdot (n+1)!$$

$$HL = (n+1) \cdot (n+2)! = (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+1)! = (n^2 + 3n + 2) \cdot (n+1)! > (n^2 + 3n + 1) \cdot (n+1)! = VL$$

Alltså är $VL < HL$ och P_{n+1} är sant.

Lektion 9 och start av 10: Kombinatorik och Binomialsatsen

(1)

(Derivator, integraler och sånt ... Avsnitt 1.11-1.12)

Om vi har n stycken bollar med olika färg i en urna

Först finns n bollar i urnan så första bollen vi väljer kan väljas på n olika sätt

sedan –"– $n-1$ –"– andra –"– $n-1$ –"–

–"– $n-2$ –"– tredje –"– $n-2$ –"–

$\vdots$

1 n:te 1

Totala antalet möjliga val blir

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \overset{\text{def}}{=} n! \quad (n\text{-fakultet})$$

(Ex 1.38 Hur många ord (ordningar) på sex bokstäver kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i KIRUNA? sex olika bokstäver vi kan välja första på 6 olika sätt, andra 5, tredje 4)

Ex 1.40 Hur många ... SALAMANCA? På Lektionen vt 2019: LULEÅ

Ge först de 4 Ana identitet genom indexering
$SA_1LA_2MA_3NCA_4$

Då 9 olika bokst som kan väljas i $9!$ olika ordningar, men vi kan dela in dem i grupper om $4!$ som bara skiljer sig på att de fyra Ana kommer i olika ordning.

Alltså: $\frac{9!}{4!}$ olika ord.

~~Ex 1.41: Hur många olika fotbollslag om 11 spelare kan väljas i en klass på 16 elever?~~

~~Lösn: Själva urvalet kan göras på $16 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 6 = 16!/5!$ olika sätt men då kan varje givet lag väljas på $11!$ olika sätt, men vi bryr oss inte om i vilken ordn. spelarna i ett lag väljs så vi delar upp de $\frac{16!}{5!}$ olika valen i grupper om $11!$ och får då $\frac{16!}{5! \cdot 11!}$ olika lag~~

Mer generellt

~~Sats 1.3 Antalet möjliga kombinationer av k element ur n givna är $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$~~

Ex. (Lotto)

På hur många sätt kan man välja 7 heltal mellan 1 och 35?

Första talet kan väljas på 35 olika sätt

För varje sådant val kan tal nummer 2 väljas på 34 sätt

— " — 3 — " — 33 sätt

⋮

— " — 7 — " — 29 sätt

Alltså totalt $35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 29$ olika sätt (att dra en lottorad (som på TV)) eller

$$\frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdots 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{28 \cdot 27 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{35!}{28!}$$ olika sätt,

men då har varje möjlig lottorad räknats med flera gånger. T ex är raderna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 och 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 samma lottorad. Vi har bara dragit numren i olika ordning. Varje möjlig har räknats 7! gånger, för det finns $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ olika sätt att permutera (= kasta om ordningen på) sju olika heltal.

Alltså finns det $\frac{35!}{28! \cdot 7!} = 6\,724\,520$ olika

Mer generellt:

$$\boxed{\text{Antalet möjliga val av } k \text{ element ur } n \text{ givna är } \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Dessa tal kallas binomialkoefficienter och brukar skrivas $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

polynom: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Mer ovanliga ord: monom (en term, tex $3ax$), binom (två termer, tex $2x + 9x^2$), trinom (tre termer, tex $1 + 2x + x^2$)

Binomialkoefficienterna dyker naturligt upp då man räknar ut potenser av binom, som $(a+b)^n$, n positivt heltal

Binomialkoefficienter dyker upp när man räknar ut $(a+b)^n$ för heltal n

$$(a+b)^2 = \underbrace{(a+b)}_{F_1} \cdot \underbrace{(a+b)}_{F_2} = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

Varje term har en faktor (a eller b) vardera från F_1 och F_2

$$(a+b)^3 = \overbrace{(a+b)}^{F_3}\,\overbrace{(a+b)}\,\overbrace{(a+b)}$$

$$= (a+b) \cdot (a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b)$$

Varje term har en faktor (a eller b) vardera från F_1, F_2, F_3.

$$= a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot b + a \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot a + b \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot a + b \cdot b \cdot b$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{F_1}\underbrace{(a+b)}_{F_2}\underbrace{(a+b)}_{F_3} \cdots \underbrace{(a+b)}_{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \overset{?}{C_k}\, a^k b^{n-k}$$

En faktor (a eller b) vardera tagen från faktorerna $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$

När man multiplicerar ihop alla n parenteserna så fås en summa av alla olika termer $a^k b^{n-k}$ som man kan få genom att från varje parantes välja antingen ett a eller ett b och sedan multipliceras ihop de n valen. Termerna a^n och b^n kommer med exakt en gång, men övriga termer $a^k b^{n-k}$ kommer med exakt en gång för varje sätt som man kan välja a från k faktorer F_m av n möjliga och b från övriga $n-k$ faktorer, det vill säga $\binom{n}{k}$ gånger.

BINOMIALSATSEN

För godtyckliga tal a och b och för alla heltal $n > 0$ så är

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ex 1 $(x-3)^3 = (x + (-3))^3 =$

$$= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2 \cdot (-3) + \binom{3}{2}x \cdot (-3)^2 + \binom{3}{3}(-3)^3$$

$$= x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$\binom{3}{0} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$, $\binom{3}{1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$,

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$, $\binom{3}{3} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1$

Ex 2 Pascals triangel:

(Lätt sätt att räkna ut binomial-koefficienter)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$n=6$: 1 6 15 20 15 6 1

$$(a+b)^6 = a^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + a^6$$

Varför blev det så? Pascals triangel bygger på två formler $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ och $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ som jag nu skall försöka resonera mig fram till och förklara dessa.

4

Notera: Antalet sätt att välja k element av n, t.ex. ur en urna, är samma som antalet sätt att välja vilka $n-k$ som skall ligga kvar i urnan:

Symmetri: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

Kan även visas direkt genom att byta k mot $n-k$ i definitionen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Notera även: Om vi väljer $k+1$ element av $n+1$ så kan vi välja att särbehandla ett element, kalla det α, och dela upp de $\binom{n+1}{k+1}$ olika valen i a) de som innehåller α, b) de som ej innehåller α.

a) innehåller α samt ytterligare k element valda bland n möjliga dvs $\binom{n}{k}$ val.

b) $k+1$ valda från n möjliga, dvs $\binom{n}{k+1}$

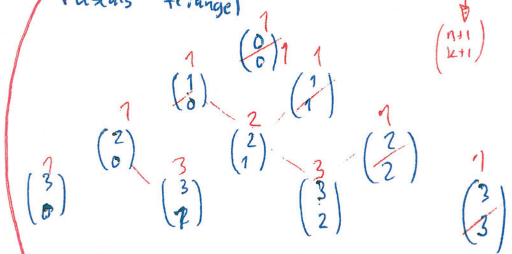
Slutsats

$$\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$$

rad $n+1$ som summa av elem fr rad$_{-1}$

$\binom{n+1}{k+1}$

Pascals triangel



Alternativt bevis

Från definitionen av binomialkoefficient fås att

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!\cdot(k+1)}{(n-k)!\,k!\cdot(k+1)} + \frac{(n-k)\,n!}{(n-k)(n-(k+1))!\,(k+1)!} = \frac{n!\,(\cancel{k}+1+n-\cancel{k})}{(n-k)!\,(k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(n+1-1-k)!\,(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!\,(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

5

Mer på nästa sida om olika sätt att beräkna binomialkoefficienter.

Tentauppgift 2007-12-18

1. (a) Vad är koefficienten svarande till x^6 i binomialutvecklingen av

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10}$$

(3 p)

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \underbrace{x^k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k}}_{= 2^{10-k}\cdot x^{k-(10-k)} = 2^{10-k} x^{2k-10}}$$

x^6-term för k sådant att $2k-10=6$

$2k = 16$

$k = 8$

Koefficienten är då $\binom{10}{k}\cdot 2^{10-k} = \binom{10}{8}\cdot 2^2 = \binom{10}{8}\cdot 4 = 45\cdot 4 = 180$

$= \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$1 = \binom{10}{0}$	$10 = \binom{10}{1}$	$45 = \binom{10}{2}$	$120 = \binom{10}{3}$	$210 = \binom{10}{4}$	$252 = \binom{10}{5}$	$210 = \binom{10}{6}$	$120 = \binom{10}{7}$	$45 = \binom{10}{8}$	$10 = \binom{10}{9}$	$1 = \binom{10}{10}$

Kontrollräkning:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{\cancel{10}\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} = 63\cdot 4 = 252$$

Stämmer!

SVAR: 180

Kastar man om exponenterna i termerna i binomialsatsen så är det fortvarande samma summa och räkneexemplet på förra sidan ger samma slutresultat:

Igår: Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{eller } a^k b^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k} x^{10-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^k \frac{x^{10-k}}{x^k} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^k x^{10-2k}$$

$$10-2k=6 \iff 2k=10-6, \quad k=\frac{10-6}{2}=2$$

För x^6-termen är $k=2$ och koefficienten är

$$\binom{10}{2}\cdot 2^2 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}4 = \frac{90}{2}4 = \underline{\underline{180}}$$

Alternativt $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \cdots$ eller pascals triangel

Annan typ av räkneexempel

$$\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k} 9999^{12-k}(-9997)^k = (9999-9997)^{12} = 2^{12} = 4096$$

Binomialsatsen kommer även att vara användbar längre fram för att härleda deriveringsregeln

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}.$$

Beräkning av binomialkoefficient

Pascals triangel eller definitionen eller följande omskrivning

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}}{\cancel{(n-k)!}\,k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Exempel:

Matlab

$$\binom{12}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot 10}{1\cdot\cancel{2\cdot 3}} = 2\cdot 110 = 220 = \texttt{nchoosek(12,3)}$$

$$\binom{14}{12} = \binom{14}{2} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}\cdot 13}{1\cdot\cancel{2}} = 7\cdot 13 = 91$$

Eftersom $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{12}{4} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3\cdot 4}} = 5\cdot 99 = 495$$

M0047M – Differentialkalkyl

Lp 1 2023

Niklas Grip
Niklas.Grip@ltu.se

12 september 2023

L 10: Talföljder och konvergens [AE22, Avsnitt 9.1]

Definition (Talföljd)

En *talföljd* är en ordnad lista av tal som har ett första element (eller term) men inget sista element. Vi kan specifiera en talföljd $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ på följande sätt:

- Genom att skriva ut några av de första termerna (förutsatt att mönstret är uppenbart). *Exempel:* $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$.
- Genom att ge en formel för term a_n som funktion av n. *Exempel:* $(a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$.
- *Rekursiv definion* av term a_n som funktion av tidigare termer $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. *Exempel:* Fibonaccis talföljd $a_1 = a_2 = 1$ och $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ för heltal $n \geq 1$, så att $(a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots)$.

Indexeringen måste inte börja från $n = 1$.

Definition (Egenskaper hos talföljder)

Vi säger att talföljden $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ är

- *växande* om $a_{n+1} \geq a_n$ för alla heltal $n \geq 1$,
- *avtagande* om $a_{n+1} \leq a_n$ för alla heltal $n \geq 1$,
- *monoton* om (a_n) är växande eller avtagande,
- *alternerande* om $a_n a_{n+1} < 0$ för alla heltal $n \geq 1$ (alltså nollskilda med vartannat a_n negativt och vartannat positivt),
- *uppåt begränsad* med *övre gräns U* om $a_n \leq U$ för alla a_n,
- *nedåt begränsad* med *undre gräns L* om $a_n \geq L$ för alla a_n,
- *begränsad* om (a_n) är både uppåt och nedåt begränsad,
- *positiv* om $a_n \geq 0$ för alla a_n och
- *negativ* om $a_n \leq 0$ för alla a_n.

Om någon av dessa egenskaper gäller för $n \geq N > 1$ så säger vi att talföljden är *så småningom* växande, avtagande, monoton etc.

Exempel: $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ är både växande, avtagande, positiv och negativ.

Exempel 1 (Delvis på tavlan)

1. $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$ är positiv, växande, och begränsad, ty $0 \leq a_n \leq 1$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.
2. $(a_n) = ((-2)^n)_{n=0}^{\infty} = (1, -2, 4, -8, 16, \ldots)$ är alternerande och obegränsad.
3. $(a_n) = \left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \ldots)$ är positiv, så småningom avtagande och begränsad ($0 \leq a_n \leq \frac{9}{8}$).

Notation och skillnad mellan följder och mängder

I Adams och många andra böcker används "mängdparanteser" {} för följder. Några viktiga skillnader mellan följder och mängder är att i en *följd* är ordningen på elementen viktig och samma element kan förekomma flera eller oändligt många gånger. Definierar man en *mängd* genom att räkna upp ingående element så har det ingen betydelse i vilken ordning man räknar upp dem och ett givet element har antingen egenskapen att det ingår i mängden eller att det inte ingår. Till exempel är mängderna $\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{2,1,3\} = \{2,3,1\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$.

2023-09-12

M0047M Lp 1 2023

Exempel 1 (Delvis på tavlan)

1. $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$ är positiv, växande, och begränsad, ty $0 \le a_n \le 1$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.
2. $(a_n) = ((-2)^n)_{n=0}^{\infty} = (1, -2, 4, -8, 16, \dots)$ är alternerande och obegränsad.
3. $(a_n) = \left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \dots\right)$ är positiv, så småningom avtagande och begränsad ($0 \le a_n \le \frac{9}{8}$).

Notation och skillnad mellan följder och mängder

I Adams och många andra böcker används "mängdparanteser" $\{\}$ för följder. Några viktiga skillnader mellan följder och mängder är att i en *följd* är ordningen på elementen viktig och samma element kan förekomma flera eller oändligt många gånger. Definierar man en *mängd* genom att räkna upp ingående element så har det ingen betydelse i vilken ordning man räknar upp dem och ett givet element har antingen egenskapen att det ingår i mängden eller att det inte ingår. Till exempel är mängderna $\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{2,1,3\} = \{2,3,1\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$.

Exempel 1, punkt 3 : För de *beräknade* värdena är $a_{n+1} < a_n$ för $n \ge 3$. För att visa att samma gäller för *alla* $n \ge 3$ kan vi använda några resultat från kommande föreläsningar (och gymnasiet?) som ligger före kapitel 9 i Adams: Observera först att[a]

$$a_n = e^{\ln(a_n)} = e^{\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right)} = e^{2\ln(n) - n\ln(2)} = e^{g(n)},$$

där vi vill visa att funktionen $g(x) = 2\ln(x) - x\ln(2)$ är avtagande för $x \ge 3$, för då följer att a_n är avtagande för $n \ge 3$. För $x \ge 3$ är derivatan

$$g'(x) = \frac{2}{x} - \ln(2) \le \frac{2}{3} - \ln(2) \approx \frac{2}{3} - 0{,}6931 \approx -0.0265 < 0,$$

vilket ger att $g(x)$ är avtagande för $x \ge 3$.

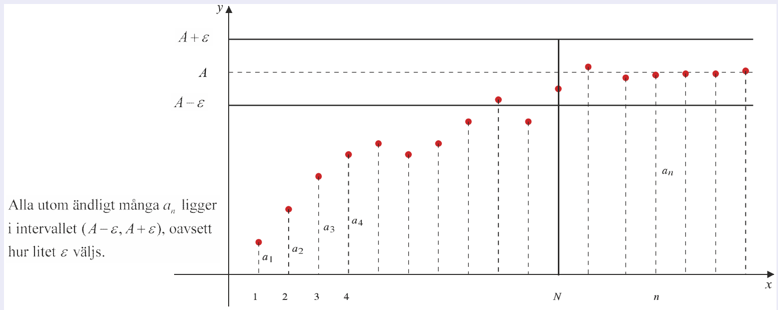
[a] Den första omskrivningen kan vara användbar i en av de utdelade övningsuppgifterna.

Definition (Konvergens och divergens av talföljder)

Vi säger att talföljden $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ *konvergerar* mot gränsvärdet A och skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

om avståndet $|a_n - A|$ mellan a_n och A kan göras hur litet som helst genom att välja tillräckligt stora n.
Vi säger då att a_n går mot A när n går mot oändligheten.
Om en följd inte konvergerar så säger vi att den *divergerar*.



Räkneregler för gränsvärden (återkommer i Kapitel 1, Lektion 11–12)

Because of this, the standard rules for limits of functions (Theorems 2 and 4 of Section 1.2) also hold for limits of sequences, with the appropriate changes of notation. Thus, if $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ converge, then

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

Även: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{assuming } \lim_{n\to\infty} b_n \ne 0.$$

If $a_n \le b_n$ ultimately, then $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

If $a_n \le b_n \le c_n$ ultimately, and $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$, then $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Exempel (Eftersom $0 \le \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$.)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{n^2}e^{-n}}{9 + \frac{\sin(n)}{n}}} = \sqrt{\frac{2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-n}}{9 + \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}}} = \sqrt{\frac{2 + 0 \cdot 0}{9 + 0}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Exakt gränsvärdesberäkning i Matlab

Matlabkod för exakt beräkning av gränsvärde

I Matlablaborationen skall ni enbart göra numeriska beräkningar. Men för resten av livet är det ju ändå bra att även veta hur man använder symbolisk matematik i Matlab för exakt beräkning av till exempel gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{n^2}e^{-n}}{9 + \frac{\sin(n)}{n}}}$$

```
syms n % Skapa en symbolisk variabel

% Funktionen/följden vi vill beräkna gränsvärdet för:
f = sqrt( (2 + 1/n^2*exp(-n)) / (9 + sin(n)/n) )
% (Ej begränsad till n = heltal.)

% Beräkna gränsvärdet när n går mot oändligheten:
flim = limit(f, n, inf)

% Mer information och exempel i Avsnitt 19.2 i Matlabboken av
% Per Jönsson (Fjärde upplagan).

f =
((exp(-n)/n^2 + 2)/(sin(n)/n + 9))^(1/2)
flim =
2^(1/2)/3
```

Exempel 2 (Gränsvärde av typ "$\infty - \infty$". På tavlan?)

Förläng med konjugatet och använd konjugatregeln:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)\cdot\frac{1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1.\end{aligned}$$

Exempel 3 (delvis på tavlan.)

1. $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot 1, ty
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} = 1-0 = 1.$$
2. Talföljden $(a_n) = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$ divergerar. Den är dock begränsad, ty $-1 \le a_n \le 1$ för alla a_n.
3. $(a_n) = (2^n)_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$ är obegränsad och divergerar.

Sats

Om (a_n) konvengerar så är (a_n) begränsad. Med andra ord[a]:
Om (a_n) är obegränsad så divergerar (a_n).

[a] Enligt [DEG+00, Avsnitt 1.2]:

Definitionen av negationen av en utsaga innebär att utsagan $A \Rightarrow B$ är ekvivalent med utsagan *icke-B* $\Rightarrow$ *icke-A*.

Sats 1

- *Varje (så småningom)* **växande** *följd med* **övre** *gräns konvergerar.*
- *Varje (så småningom)* **avtagande** *följd med* **undre** *gräns konvergerar.*

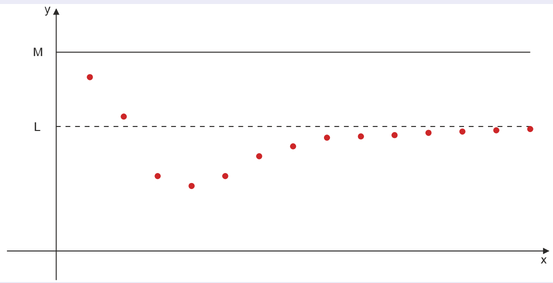
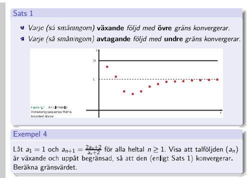


Figure 9.2 An ultimately increasing sequence that is bounded above

Exempel 4

Låt $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+2}$ för alla heltal $n \ge 1$. Visa att talföljden (a_n) är växande och uppåt begränsad, så att den (enligt Sats 1) konvergerar. Beräkna gränsvärdet.



Exempel 4, induktionsbevis för att talföjden (a_n) är *växande.*

Vi kommer flera gånger att utnyttja att

$$a_{n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+2} = \frac{2(a_n+2)-2}{a_n+2} = 2-\frac{2}{a_n+2}. \qquad (1)$$

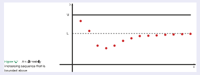
Påstående P_n: $a_{n+1} \ge a_n$ för alla heltal $n \ge 1$.
Basfall: För $n = 1$ är $a_1 = 1$ och $a_2 = \frac{2\cdot 1+2}{1+2} = \frac{4}{3} > a_1$, så P_1 är sant.
Induktionsantagande: Antag att P_n är sant.
Induktionssteg: För P_{n+1} är då

$$VL = a_{n+2} \overset{(1)}{=} 2-\frac{2}{a_{n+1}+2} \overset{P_n}{\ge} 2-\frac{2}{a_n+2} \overset{(1)}{=} a_{n+1} = HL.$$

Vi har alltså visat att $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Induktionsaxiomet ger att P_n är sant för alla heltal $n \ge 1$. Alltså är talföjden (a_n) *växande.*

Sats 1

- *Varje (så småningom)* **växande** *följd med* **övre** *gräns konvergerar.*
- *Varje (så småningom)* **avtagande** *följd med* **undre** *gräns konvergerar.*



Exempel 4

Låt $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+2}$ för alla heltal $n \geq 1$. Visa att talföljden (a_n) är växande och uppåt begränsad, så att den (enligt Sats 1) konvergerar. Beräkna gränsvärdet.

Exempel 4, induktionsbevis för att talföljden (a_n) är *begränsad*.

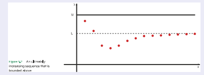
Påstående P_n: $a_n < 2$ för alla heltal $n \geq 1$.
Basfall: För $n = 1$ har vi $a_1 = 1 < 2$, så P_1 är sant.
Induktionsantagande: Antag att P_n är sant för något heltal $n \geq 1$.
Induktionssteg: För P_{n+1} är då

$$VL = a_{n+1} \overset{(1)}{=} 2 - \frac{2}{a_n+2} \overset{P_n}{<} 2 - \frac{2}{2+2} < 2 = HL.$$

Vi har alltså visat att $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Induktionsaxiomet ger att P_n är sant för alla heltal $n \geq 1$. Alltså är (a_n) en växande talföljd med övre gräns. Enligt Sats 1 konvergerar (a_n).

Sats 1

- *Varje (så småningom)* **växande** *följd med* **övre** *gräns konvergerar.*
- *Varje (så småningom)* **avtagande** *följd med* **undre** *gräns konvergerar.*



Exempel 4

Låt $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+2}$ för alla heltal $n \geq 1$. Visa att talföljden (a_n) är växande och uppåt begränsad, så att den (enligt Sats 1) konvergerar. Beräkna gränsvärdet.

Exempel 4, beräkning av gränsvärdet (med räknereglerna från sid 6).

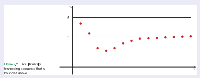
Vi har visat att följden har ett gränsvärde $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Vi beräknar a genom att beräkna gränsvärdet av vänster och höger led i

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(1)}{=} 2 - \frac{2}{a_n+2} \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= 2 - \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n + 2} \\ a &= 2 - \frac{2}{a+2} \\ a^2 - 4 = (a-2)(a+2) &= -2 \\ a^2 &= 2. \end{aligned}$$

Eftersom alla $a_n \geq a_1 = 1 > 0$ så måste även $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n = a = \sqrt{2}$.

Sats 1

- *Varje (så småningom)* **växande** *följd med* **övre** *gräns konvergerar.*
- *Varje (så småningom)* **avtagande** *följd med* **undre** *gräns konvergerar.*



Exempel 4

Låt $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+2}$ för alla heltal $n \geq 1$. Visa att talföljden (a_n) är växande och uppåt begränsad, så att den (enligt Sats 1) konvergerar. Beräkna gränsvärdet.

Exempel 4 numeriskt i Matlab

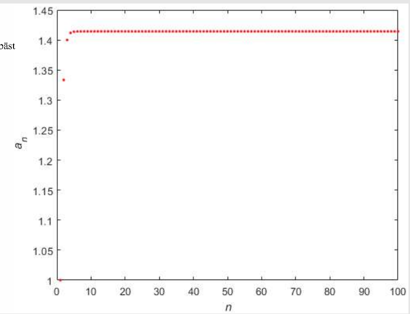
Med numeriska beräkningar, som i Matlab-laborationen, så kan vi inte göra exakt beräkning av gränsvärden. Som bäst kan vi beräkna a_n för stora n och dra slutsats om ungefärligt gränsvärde:

```
N = 100;          % Vi beräknar a_n för n<=N.  Kan ökas vid behov.
n = 1:N;          % Vektor med talen 1, 2, 3, ..., N.
a = zeros(1,N);   % Vektor med plats reserverad för att spara beräknade a_n.
a(1) = 1;         % Sätt a_1 = 1.
for nn = 1:N-1
  a(nn+1) = (2*a(nn)+2)/(a(nn)+2); % Rekursiv beräning av a_{n+1}.
end
plot(n,a,'r.');
xlabel('\it n')
ylabel('\it a_n')
disp(['Ur graf avläser vi ett ungefärligt gränsvärde ' num2str(a(N)) '.'] )
```

Ur graf avläser vi ett ungefärligt gränsvärde 1.4142.

Det avlästa ungefärliga gränsvärdet är misstänkt nära $\sqrt{2}$.

Published with MATLAB® R2023a



[AE22] Robert A. Adams and Cristopher Essex.
Calculus — A complete course.
Pearson, Canada, tenth edition, 2022.

[DEG+00] Andrejs Dunkels, Håkan Ekblom, Anders Grennberg, Torbjörn Hedberg, Eilif Hensvold, Henry Kallioniemi, and Reinhold Näslund.
Derivator, integraler och sånt ....
Studentlitteratur, 2000.

Lektion 11-12: Gränsvärden och oegentliga gränsvärden
(Adams avsnitt 1.1-1.3)

Ex: En fallande sten har höjden $y(t) = 10 - 4{,}9t^2$ meter vid tidpunkten t sekunder. Medelhastigheten i ett litet intervall $[1, 1+h]$ $h > 0$ är

$$v(h) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(1+h) - y(1)}{\cancel{1}+h - \cancel{1}} = \frac{\cancel{10} - 4{,}9(1+h)^2 - (\cancel{10} - 4{,}9 \cdot 1^2)}{h}$$

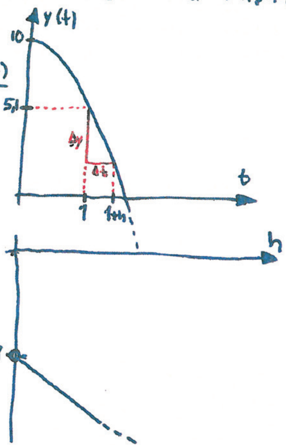
Ej definierad för $h=0$!

$$= \frac{-4{,}9(\cancel{1} + 2h + h^2) + \cancel{4{,}9}}{h} = -\frac{4{,}9\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$$

$$= -(9{,}8 + 4{,}9h), \quad h > 0.$$

Efter förenkling går att sätta in $h=0$.

$v(0)$ ej definierat men $\lim\limits_{h \to 0} v(h) = -9{,}8$ m/s



Mer precis terminologi för att beskriva hur en funktion $f(x)$ uppför sig då x närmar sig x_0:

Högergränsvärde
Vänstergränsvärde
Gränsvärde ($f(x)$ nära A då x ligger nära x_0)

En funktion f sägs ha gränsvärdet A då x går mot x_0 om det går att få $f(x)$ att ligga godtyckligt nära A genom att välja $x \neq x_0$ ($x < x_0$, $x > x_0$) . . tillräckligt nära x_0. Detta gäller även om $f(x)$ inte är definierad för $x = x_0$

Lite oprecist, men precist nog för den här kursen. Se avsnitt 1.5 eller "djupare" analysböcker för mer fullständig definition.

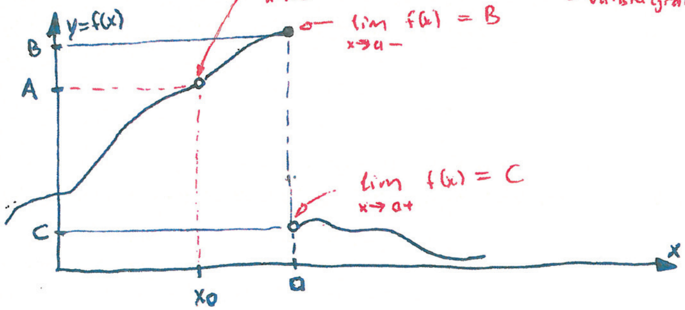
Detta skrivs $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = A$

eller $f(x) \to A$ då $x \to x_0^{\pm}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ gränsvärde = högergränsvärde = vänstergränsvärde

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = B$

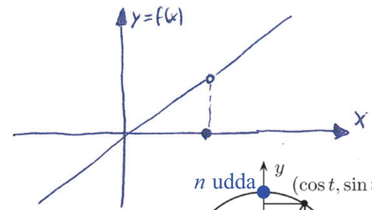
$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = C$



Direkt från dessa definitioner kan man inse att

Om $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$ och $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ så är $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Exempel: $f(x) = \begin{cases} x & \text{om } x \neq 7 \\ 0 & \text{om } x = 7 \end{cases}$

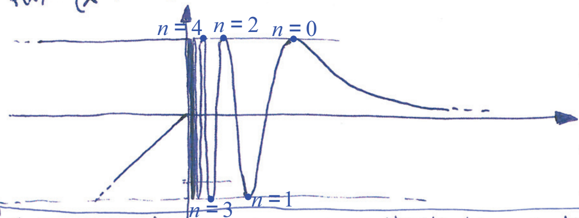


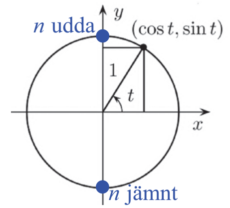
$\lim\limits_{x \to 7} f(x) = 7 \neq f(7)$

Gränsvärde i x_0 beror bara av funktionsvärden $f(x)$ för x nära x_0 men $x \neq x_0$.

Exempel

$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{för } x > 0 \\ x & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$ $f(x) \to 0$ då $x \to 0-$





För heltal $n \geq 0$ och $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ är $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$

och enhetscirkeln ger att $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n$.

Alltså har f(x) inget högergränsvärde då $x \to 0$.

"Gränsvärden bevarar summor, multiplikation och division"

För $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$ och konstant k gäller att

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$$

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = FG$$

$$\lim_{x \to a} k f(x) = kF$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{om } G \neq 0$$

$$\lim_{x \to a} \left(f(x)\right)^{\frac{m}{n}} = F^{\frac{m}{n}}$$ förutsatt att $F \neq 0$ om $\frac{m}{n} < 0$, $F > 0$ om n är jämn

om $f(x) \leq g(x)$ på ett öppet intervall som innehåller a så är $F \leq G$.

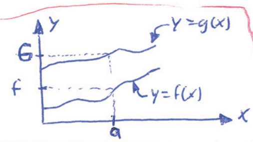
För bevis krävs en mer noggrann definition av gränsvärde (avsnitt 1.5 i Adams, kursen Analysens grunder.)

men räcker att lära sig använda i den här kursen.

Ex: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^3 + 7x}{x^2 + 3x + 4} = \frac{a^3 + 7a}{a^2 + 3a + 4}$ förutsatt att $a^2 + 3a + 4 \neq 0$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{2x+1} = \sqrt{2 \cdot 2 + 1} = \sqrt{5}$$

Lätt att tro på:



③

För knepiga gränsvärden kan man smart förkortning eller annan omskrivning behövas. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}^{"\frac{0}{0}"}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{3})(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} =$$

Går ej att sätta in $x=0$!

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{3}-x-\cancel{3}}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}} =$$

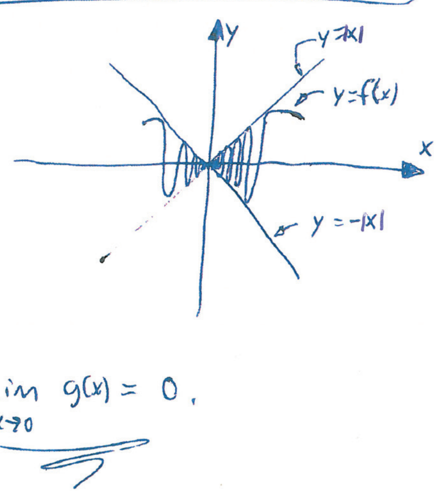
$$= -\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\lim_{x\to 0}(3-x)}}_{=\sqrt{3}}+\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Instängningssatsen

Antag att $f(x) \le g(x) \le h(x)$ för alla $x \neq a$ i ett öppet intervall som innehåller a.

Om $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$ så är $\lim_{x\to a} g(x) = A$

Exempel: $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



f(x) är instängd mellan $f(x) = -|x|$ och $h(x) = |x|$

$$\lim_{x\to 0} -x = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Instängningssatsen ger att $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

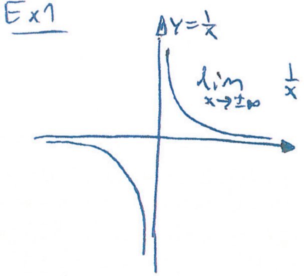
④

Gränsvärde av en funktion då $x \to \infty$ (eller $-\infty$)

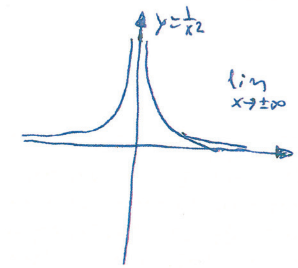
Funktionen f sägs ha gränsvärdet A då x går mot (minus) oändligheten om det går att stänga in $f(x)$ godtyckligt nära A genom att betrakta tillräckligt stora x $(-x)$

Detta skrivs $\lim_{x\to\infty \,(-\infty)} f(x) = A$ eller $f(x) \to A$ då $x \to \infty$ $(-\infty)$

Ex 1



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Ex 2

Standardknep för rationella polynom, kvadratröter av rationella polynom och liknande: bryt ut dominerande faktorn i täljare och nämnare:

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{3x^5+4x+1}{5x^5+7x^4+3x}}_{"\frac{\infty}{\infty}"} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^5}(3+\underbrace{4x^{-4}}_{\to 0}+\underbrace{x^{-5}}_{\to 0})}{\cancel{x^5}(5+\underbrace{7x^{-1}}_{\to 0}+\underbrace{3x^{-4}}_{\to 0})} = \frac{3}{5}$$

Ex 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x^3+5x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^3(3+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\cdot\frac{(2+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0})}{(3+\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{7}{x^3}}_{\to 0})} = 0$$

Ex 4

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\sqrt{x^2+x}-x}^{\to "\infty-\infty"} = ?$$

$$\sqrt{x^2+x}-x = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\to 1}+1)} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ då } x\to\infty$$

(5)

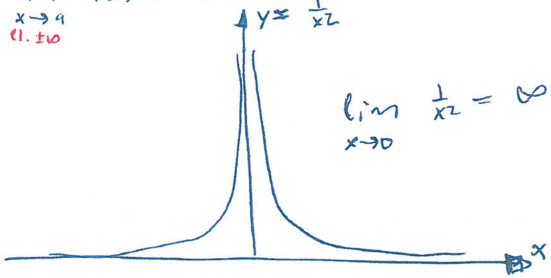
Oegentliga gränsvärden

Om $f(x)$ växer obegränsat när x närmar sig a (eller $\pm\infty$) så sägs f ha det oegentliga gränsvärdet oändligheten då x går mot a (eller $\pm\infty$) och vi skriver $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (el. $x\to\pm\infty$)

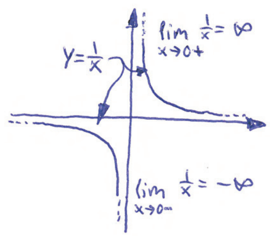
eller $f(x) \to \infty$ då $x \to a$ (el $x\to\pm\infty$)

På samma sätt definieras oeg. gränsvärden
$$\lim_{\substack{x\to a\\ \text{el. } \pm\infty}} f(x) = -\infty$$

Ex



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Inget gränsvärde $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

Ex $\lim\limits_{x\to\infty} (-x^4) = -\infty$

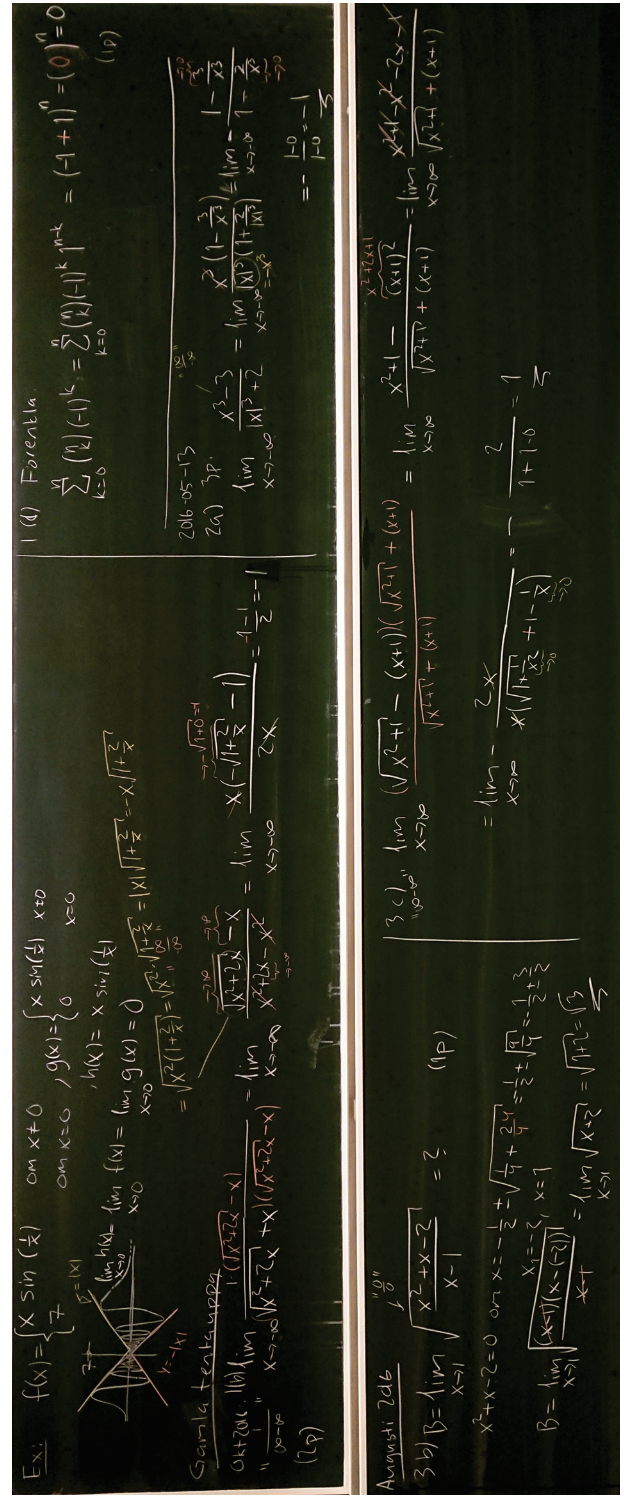
Ex $$\lim_{x\to 3} \frac{7-x}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{7-x}^{\to 4}}{\underbrace{(x-3)^2}_{\substack{>0\\ \to 0}}}$$

Man kan även se detta som produkten
$$\underbrace{(7-x)}_{\to 4}\cdot\underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\substack{>0\\ \to\infty}}$$

Ex $$\lim_{x\to 3-} \frac{\overset{\to 4}{\overbrace{7-x}^{>0}}}{\underbrace{(x-3)^3}_{<0}} = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 3+} \frac{\overbrace{7-x}^{>0}}{(x-3)^3} < 0 = \infty,$$

så $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7-x}{(x-3)^3}$ existerar ej.

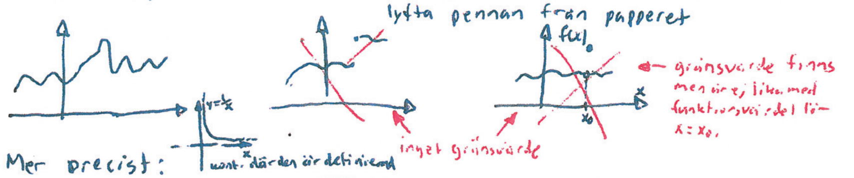
Ett extra exempel och några gamla tentauppgifter på tavlan



Lektion 13: Kontinuitet (Adams avsnitt 1.4)

Lite grovt kan man säga att

kontinuerliga funktioner = såna man kan rita utan att lyfta pennan från papperet



Mer precist:

> Funktionen f sägs vara <u>kontinuerlig</u> i punkten x_0 om $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Krävs alltså tre saker:

1) f är definierad i x_0
2) f har ett gränsvärde i x_0
3) detta gränsvärde $= f(x_0)$

> Ex: $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Från förra lektionen så vet vi att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. "Lyfta pennan från papperet" definitionen duger ej här, ty oändligt lång kurva för varje intervall som innehåller 0 (det lär ni er räkna ut läsperiod 2), men $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ är kontinuerlig enligt den "riktiga" definitionen till vänster.

(Adams gör olika separata definitioner då f är definierad i ett öppet eller halvöppet intervall som innehåller x_0, men det känns lite onödigt. Men amerikanska bokförlag brukar ju betala per sida, har jag hört...)

På motsvarande sätt:

> f vänsterkontinuerlig om $\lim_{x \to x_0^-} = f(x_0)$
>
> f högerkontinuerlig om $\lim_{x \to x_0^+} = f(x_0)$

Vi säger att f är kontinuerlig på intervallet I om f är kontinuerlig i varje punkt på intervallet.

Exempel: Några funktioner som är konterliga i hela sin definitionsmängd

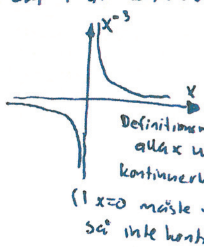
(a) Alla polynom

(b) Alla rationella funktioner

(c) Alla potensfunktioner $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

(d) $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$

(e) Absolutbeloppfunktionen $|x|$

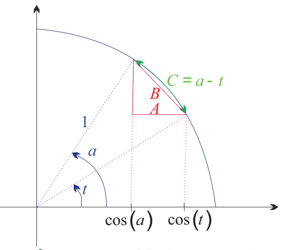


Definitionsmängd: alla x utom $x = 0$

kontinuerlig i de punkterna

(I $x=0$ måste man lyfta pennan, så inte kontinuerlig där men kontinuerlig överallt där den är definierad.)

är kontinuerliga:



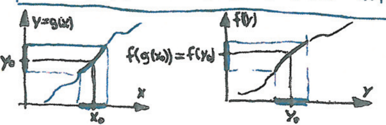
$0 \le \cos(t) - \cos(a) = A \le B \le C = a - t \to 0$ då $t \to a$

Instängningssatsen ger att $\cos(t) - \cos(a) \to 0$ då $t \to a$.

Alltså är $\lim_{t \to a} \cos(t) = \lim_{t \to a}\left[\cos(t) - \cos(a) + \cos(a)\right] = 0 + \cos(a)$

Sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga:

> Om funktionen $g(x) \to y_0$ då $x \to x_0$ och funktionen f är kontinuerlig i punkten y_0 så gäller att $f(g(x)) \to \underbrace{f(y_0)}_{= f(g(x_0)) \text{ om } g \text{ kontinuerlig}}$ då $x \to x_0$.
>
> Om $g(x)$ är kontinuerlig i x_0 följer att även $f(g(x))$ är kontinuerlig i x_0.



Ex: cos, sin, $\sqrt{\ }$ och $|\ |$ kontinuerliga på sin definitionsmängd. Därför är $\cos\left(\sqrt{|\sin(x)|}\right)$ kontinuerlig och även $\frac{x^2 + 5x + 3 + \sin x}{x^2 + 1}$

Ex: Bestäm a så att f blir kontinuerlig i 2 för

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax - x^2 & \text{om } x < 2 \\ 1 - ax & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (1 + ax - x^2) = 1 + 2a - 4 = 2a - 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 1 - ax = 1 - 2a = f(2)$$

Alltså är f kontinuerlig i 2 om $2a - 3 = 1 - 2a$

$4a = 4$

Svar: $\underline{\underline{a = 1}}$

<u>Ex:</u> $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$ är definierad för $x \neq \pm\sqrt{2}$, men f har gränsvärde i de punkterna, vilket gör detta till så kallade <u>hävbara diskontinuiteter</u>. Konjugatregeln ger att

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4} = \frac{\cancel{x^2 - 2}}{\cancel{(x^2 - 2)}(x^2 + 2)} = \frac{1}{x^2 + 2} \to \frac{1}{4} \text{ då } x \to \pm\sqrt{2}$$

Vi får därför en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}$ genom att definiera

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{då } x \neq \pm\sqrt{2} \\ \frac{1}{4} & \text{då } x = \pm\sqrt{2} \end{cases} = \frac{1}{x^2 + 4}$$

(Detta sätt att utvidga definitionsmängden där en funktion f har gränsvärde men ej är definierad kallas <u>kontinuerlig utvidgning</u> av f.)

<u>Liknande exempel</u>: $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

Vi har tidigare sett (via instängningssatsen) att $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

En kontinuerlig utvidgning av f är alltså

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

(3)

Om en funktion är kontinuerlig i ett slutet intervall $[a,b]$ så har den följande viktiga egenskaper:

Satsen om största och minsta värde

f har ett största värde $f(x_1)=M$ och ett minsta värde $f(x_2)=m$

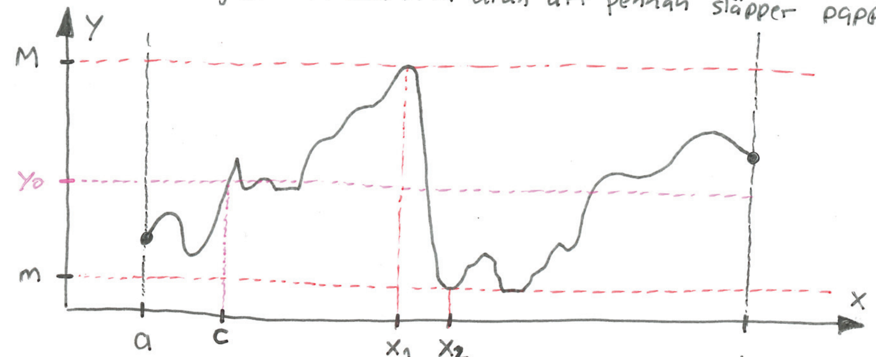
Satsen om mellanliggande värde

Om y_0 ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ så är $y_0=f(c)$ för något c mellan a och b.

(Formulerat som i boken, men går att byta $f(a)$ och $f(b)$ mot M och m.)

Bevis: Appendix III

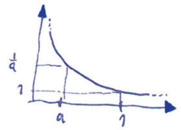
Lätt att tro på om man lite förenklat tänker på kontinuerliga funktioner som sådana vars graf man kan rita utan att pennan släpper papperet



Som i figuren så kan det t ex finnas flera möjliga värden på c, men alltid minst ett.

Ex: $f(x)=\frac{1}{x}$ Inget största värde i det öppna intervallet $(0,\infty)$.

Största värde $\frac{1}{a}$ och minsta 1 i intervallet $[a,1]$ för $0<a<1$.



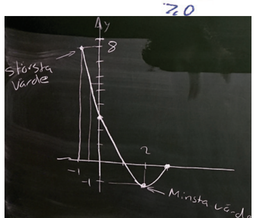
Ex: Funktionen $f(x)=x^2-4x+3$ är kontinuerlig.

Alltså finns största och minsta värde t ex på intervallet $[-1,3]$ (eller vilket annat slutet intervall som helst). I det här fallet kan min och max bestämmas via kvadratkomplettering:

$$f(x)=x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}-1$$

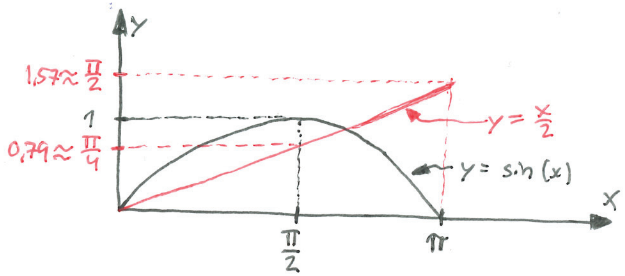
Minsta värde: $f(2)=0^2-1=-1$

Största värde i ändpunkterna.



(4)

Exempel Visa att $\sin(x)=\frac{x}{2}$ för något $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.



Låt $f(x)=\sin(x)-\frac{x}{2}$. Då gäller att påvisa nollställe i $[\frac{\pi}{2},\pi]$.

$$f(\tfrac{\pi}{2})=\sin(\tfrac{\pi}{2})-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}\approx 1-0{,}79>0$$

$$f(\pi)=\sin(\pi)-\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}<0$$

Eftersom f är kontinuerlig så ger satsen om mellanliggande värde att $f(c)=0$ för något $c\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

Det finns inget enkelt sätt att räkna ut exakta värdet på c, men upprepad användning av satsen om mellanliggande värde ger intervallhalveringsmetoden, som efter n iterationer stänger in c i ett intervall av längd $2^{-n}\cdot\frac{\pi}{2}$.

WIKIPEDIA

Bisektionsmetoden = intervallhalveringsmetoden

(Exempel på tillämpning, men intervallhalvering är inget vi behandlar närmare i den här kursen.)

Bisektionsmetoden är en metod inom numerisk analys för att försöka bestämma ett flyttal x så att $f(x)=0$ då f är en kontinuerlig funktion.

Metoden

I metoden betraktas ett kort intervall $[a,b]$ där f byter tecken, då det är känt att f någonstans i intervallet är noll, enligt satsen om mellanliggande värden.

Man tar sedan en ny punkt i intervallet, vanligtvis $c=\frac{a+b}{2}$, och såvida c själv inte är ett nollställe till funktionen så finns två möjligheter, $f(c)$ har antingen samma tecken som $f(a)$ eller $f(b)$. Man skapar nu ett nytt intervall genom att ersätta det tal av a och b vars funktionsvärde har samma tecken som $f(c)$ med c, så man får intervallet $[a,c]$ eller $[c,b]$. Proceduren upprepas sedan tills en godtagbar precision har uppnåtts.

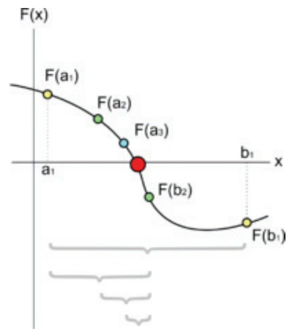


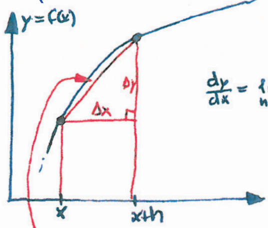
Illustration över bisektionsmetoden. Startintervallet är $[a_1,b_1]$ och påföljande intervall är $[a_1,b_2],[a_2,b_2],[a_3,b_2]$.

Källa: https://sv.wikipedia.org/wiki/Bisektionsmetoden

Lektion 14: Tangent och derivata (Adams avsnitt 2.1-2.2) ①

Derivatan till en funktion f är funktionen

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

För alla x som detta gränsvärde finns säger vi att f är deriverbar.

När $h \to 0$ fås en rät linje som går genom $(x, f(x))$ och har lutning $f'(x)$. (tangenten)

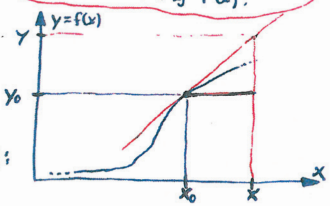
Olika beteckningar då $y = f(x)$:

$$\underbrace{f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}f(x)}_{\text{vanligast}} = D_x f(x) = Df(x)$$

eller $dy = f'(x)\,dy$

Tangenten till $f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$ är en linje genom $(x_0, f(x_0))$ med lutning $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$$



$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

Ex: Bestäm tangent till $y = x^2 = f(x)$ genom $(-2,4)$. Kännetecknande egenskaper:

- $(-2,4)$ punkt på linjen
- Linjens lutning $= f'(-2)$ med $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$

$f'(x) = 2x$

Alltså är tangentens ekvation $y = \underbrace{2\cdot(-2)}_{f'(-2)} x + m$, sätt $(x,y) = (-2,4)$

$4 = -4\cdot(-2) + m$

$-4 = m$

SVAR: $y = -4x - 4$

Beräkning av normal: Se sidan 2

2.2.47 $y = f(x) = x^2$ har två tangentlinjer som passerar genom $(1,-3)$. Hitta dessa.

Kalla tangeringspunkten (a, a^2). Tangenten har följande egenskaper

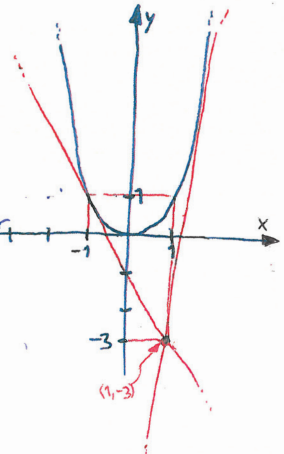
- linje genom $(1,-3)$ och genom $(a, f(a)) = (a, a^2)$
- linjens lutning är $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) = 2a$

Kombination av dessa ger att $2a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2-(-3)}{a-1}$

$2a^2 - 2a = 2a(a-1) = a^2 + 3$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$a = 1 \pm \sqrt{1^2+3} = 1 \pm 2$



Lösning 1: $a = -1 \Rightarrow f'(a) = -2$

Linjens ekvation: $y = -2x + m$, sätt $(x,y) = (1,-3)$

$-3 = -2 + m$

$m = -1$

Lösning 2: $a = 3 \Rightarrow f'(a) = 6$

Linjens ekvation: $y = 6x + m_2$, sätt $(x,y) = (1,-3)$

$-3 = 6\cdot 1 + m_2$

$m_2 = -9$

$$\boxed{\text{SVAR: } y = -2x - 1 \text{ och } y = 6x - 9}$$

②

Från avsnittet om räta linjer: $y = k_1 x + m_1$ och $y = k_2 x + m_2$ ortogonala om $k_1 k_2 = -1$.

Om f har en tangent i $(x_0, f(x_0))$ så är normalen i x_0 en rät linje vinkelrät mot tangenten (visa i tidigare grafer)

Example 6, sid 98

Hitta normalen till $y = x^2$ genom $(1,1)$.

Tangentens lutning: $2\cdot 1 = 2$

Normalens lutning: $-\frac{1}{2}$

Normalens ekvation: $y = -\frac{1}{2}x + m$ Sätt in $(x,y) = (1,1)$

$1 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + m$

$\frac{3}{2} = m$

Alltså: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$\boxed{\text{Om } f(x) = x^r \text{ så är } f'(x) = r\,x^{r-1}, \text{ för alla } r \text{ och } x \text{ som } x^{r-1} \text{ blir nåfot vettigt.}}$$

T ex ej division med 0 eller roten ur något negativt

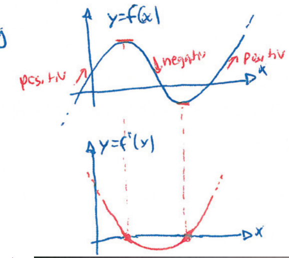
Bevis för heltals potenser $r = n =$ heltal:

Notera först att $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Kan även visas med hjälp av binomialsatsen. Se nästa sida.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\overset{a}{x+h})^n - \overset{b}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{(x+h-x)}\overbrace{\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}\right)}^{n \text{ stycken termer}}}{\cancel{h}} = n\,x^{n-1}$$

Ex: Visuell derivering



Tillägg till första exemplet:

b) Normalen till $f(x)$ genom $(-2,4)$ har ekvation $y = k_2 x + m_2$ med $k_2\cdot(-4) = -1$, $k_2 = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x + m_2$, sätta $(x,y) = (-2,4)$

$4 = \frac{1}{4}(-2) + m_2$

$\frac{2\cdot 4}{2} = -\frac{1}{2} + m_2$

$\frac{9}{2} = m_2$

Normalens ekvation: $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

Kontroll: $x = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(-2) + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Deriveringsregeln $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$ kan alternativt bevisas med binomialsatsen. För $f(x) = x^n$ är

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n}{h}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k \underbrace{\overbrace{h^{n-k-1}}^{\geq 0}}_{\to 0} + \overbrace{\binom{n}{n-1}}^{=n} x^{n-1} \underbrace{\overbrace{h^{n-(n-1)-1}}^{=0}}_{=1} + \overbrace{\frac{\overbrace{\binom{n}{n}}^{=1} x^n - x^n}{h}}^{=0}$$

$$\to n x^{n-1} \text{ då } h \to 0$$

Alternativt via induktion och produktregeln från nästa lektion:

$P_n : \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

Induktionsbevis för heltal $n \geq 2$

Visades tidigare: $P_2 : \frac{d}{dx} x^2 = 2x$ sant! (1)

Antag att P_n är sant. För P_{n+1} är då

$$VL = \frac{d}{dx} x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^1 x^n) \overset{(P_n)}{=} 1 \cdot x^n + \underbrace{x \cdot n x^{n-1}}_{= n x^n}$$

$= (n+1) x^n = HL$ Alltså $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (2)

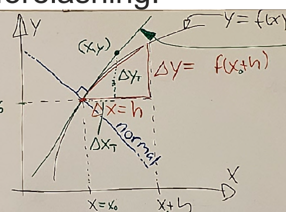
(1), (2), Induktionsaxiomet $\Rightarrow$ P_n sant för heltal $n \geq 2$.

Första definitionerna och exemplen på sid 1-2 från föreläsning:

L14: Tangenter och derivator (Adam 2.1-2.2)

Derivatan till en funktion $y = f(x)$ är funktionen

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{ lutningen på rät linje genom } (x, f(x)) \text{ och } (x+h, f(x+h))} \quad (1)$$



Tangenten till $f(x)$ i punkten x_0 är en linje genom $(x_0, f(x_0))$ med lutning $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0)(x - x_0) = y - f(x_0)$$

Tangentens ekvation:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \quad (3)$$

Vanliga beteckningar:

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = (D_x f(x) = Df(x)$ eller $dy = f'(x)dx)$

Ex: För $f(x) = x^2$ är

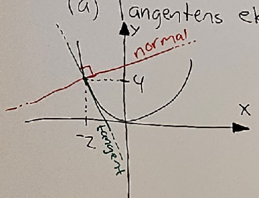
$$f'(x) \overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + \overbrace{h}^{\to 0})}{\cancel{h}} = 2x \quad (2)$$

Alltså: $\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x}$

Ex: För $y = f(x) = x^2$, beräkna ekvationen för

(a) tangenten genom $(-2, 4)$

(b) normalen genom $(-2, 4)$, dvs den räta linje som är vinkelrät mot tangenten



(a) Tangentens ekvation: $y = kx + m$ där $k = f'(-2) \overset{(2)}{=} 2(-2) = -4$

$y = -4x + m$ sätt $(x, y) = (-2, 4)$

$4 = -4(-2) + m$

$4 - 8 = m$

$m = -4$ så att $\underline{\underline{y = -4x - 4}}$

Alternativt via (3) med $x_0 = -2$, $f(x_0) = 4$, $f'(x_0) = -4$

$y = 4 - 4(x + 2) = -4x - 4$

(b) Normalens ekvation: $y = k_2 x + m_2$

Från tidigare lektion: Linjerna vinkelräta $\Leftrightarrow$ $k \cdot k_2 = -1$

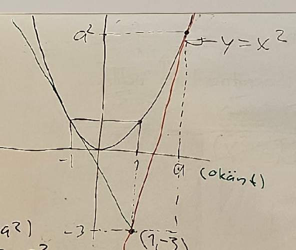
$k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$

Alltså: $y = \frac{1}{4} x + m_2$ sätt $(x, y) = (-2, 4)$

$4 = \frac{1}{4}(-2) + m_2$

$\frac{9}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = m_2$ Alltså: $\underline{\underline{y = \frac{1}{4} x + \frac{9}{2}}}$

2.2.47 $y = f(x) = x^2$ har två tangenter genom $(1, -3)$ hitta dessa. $\Rightarrow f'(x) = 2x$



$\boxed{\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}}$

För alla x och r för vilka högerled är definierat

Tex inte $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ eller $0^{-1} = \frac{1}{0}$ eller

Kalla tangeringspunkten (a, a^2). Tangenten är en linje med ($y = kx + m$) följande egenskaper:

Vi behöver tre ekvationer för att bestämma värdet på våra tre obekanta (a, k, m). Annat val av ekvationer här än på sid 1.

- linjen går genom $(1, -3)$ och genom $(a, f(a)) = (a, a^2)$
- Linjens lutning är $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) = 2a$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 2ax + m}$ (3)

sätt $(x,y) = (a, a^2)$: $a^2 = 2a^2 + m$ (1)

sätt $(x,y) = (1,-3)$: $-3 = 2a \cdot 1 + m$ (2)

$(2) - (1)$: $a^2 + 3 = 2a^2 - 2a$

$0 = a^2 - 2a - 3$

$a = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2$

$a = -1$ eller $a = 3$

Lösning 1: $a = -1 \overset{(2)}{\Rightarrow} -3 = -2 + m \Rightarrow m = -1$

$\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\underline{y = -2x - 1}$

Lösning 2: $a = 3 \overset{(2)}{\Rightarrow} -3 = 6 + m \Rightarrow m = -9$

$\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\underline{y = 6x - 9}$

Lektion 15: Deriveringsregler (Adams avsnitt 2.3)

1

$\boxed{f \text{ deriverbar i } x \Rightarrow f \text{ kontinuerlig i } x}$

Bevis:

Om f är deriverbar i x så fås då $h \to 0$ att

$$f(x+h) = \underbrace{h}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} + f(x) \longrightarrow f(x), \text{ dvs } \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{af(x+h)+bg(x+h) - (af(x)+bf(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{af(x+h)-af(x)}{h} + \frac{bg(x+h)-bg(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + b\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= a\,f'(x) + b\,g'(x)$$

Ex: $a=b=1$: $(f+g)' = f'+g'$

$$(f_1+f_2+f_3)' = (f_1+f_2)'+f_3' = f_1'+f_2'+f_3'$$

Derivata av produkt

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Bevis

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\substack{\to g(x) \\ \text{ty } g \text{ kontinuerlig}}} + f(x)\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} \right) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \square$$

Ex: $\frac{d}{dx}\big(f(x)(g(x)h(x))\big) =$

$= f'(x)\,g(x)h(x) + f(x)\cdot(g'(x)h(x) + g(x)h'(x)) =$

$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

Allmänt:

$$\frac{d}{dx}(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)) = f_1'(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2(x)f_3'(x)f_4(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)f_n'(x)$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

Bevis:

$$\underbrace{\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}}_{\to \left(\frac{f}{g}\right)'(x)} = \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\,g(x)}}{\frac{1}{h}\cdot h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)}$$

$$= \frac{\overbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}^{\to f'(x)} g(x) - f(x)\overbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}^{\to g'(x)}}{\underbrace{g(x+h)\,g(x)}_{g(x)^2}} \longrightarrow \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \text{ då } h\to 0.$$

2

Ex: $\frac{d}{dx}\left((x^2+3x+1)\cdot\sqrt[3]{x}\right) = \frac{d}{dx}\left((x^2+3x+1)\cdot x^{\frac{1}{3}}\right) =$

$$= (2x+3)\cdot x^{\frac{1}{3}} + (x^2+3x+1)\cdot\tfrac{1}{3}x^{1-\frac{1}{3}} = (2x+3)\sqrt[3]{x} + \tfrac{1}{3}(x^2+3x+1)x^{\frac{2}{3}}$$

Ex: $\frac{d}{dx}\frac{1}{3x+7} = \frac{0\cdot(3x+7) - 1\cdot 3}{(3x+7)^2} = -\frac{3}{(3x+7)^2}$

Ex: $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{x^2+3} = \frac{3x^2\cdot(x^2+3) - x^3\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

Ex: Från gymnasium respektive Lektion 16: $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$.
$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

För $f(x) = \frac{x^2\sin(x)}{1+x}$ följer då att

$$f'(x) = \frac{(2x\sin(x)+x^2\cos(x))(1+x) - x^2\sin(x)}{(1+x)^2} = \frac{\overbrace{(2x(1+x)-x^2)}^{=2x+2x^2-x^2=2x+x^2=(2x+1)x}\sin(x) + x^2(1+x)\cos(x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)x\sin(x) + x^2(1+x)\cos(x)}{(1+x)^2}$$

och

$$\frac{d}{dx}(\sin(2x)) = \frac{d}{dx}(2\sin(x)\cos(x)) = 2(\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\cdot(-\sin(x)))$$

$$= 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 2\cos(2x)$$

Ex: $\frac{d}{dt}\frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{0\cdot(1+\frac{1}{t}) - 1\cdot(0+(-1)t^{-2})}{(1+\frac{1}{t})^2} = \frac{\frac{1}{t^2}\cdot t^2}{(1+\frac{1}{t})^2\cdot t^2} =$

$$= \frac{1}{(t+1)^2}$$

Allmänt:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = \frac{0\cdot f(x) - 1\cdot f'(x)}{f(x)^2} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

(= Theorem 4, "The Reciprocal Rule" i dagens avsnitt i boken.)

Lektion 16: Kedjeregeln (Adams avsnitt 2.4)

1

Kedjeregeln

För $g(x)$ deriverbar i x och $f(u)$ deriverbar i $u=g(x)$ så är

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,\underbrace{g'(x)}_{\text{inre derivatan}}$$

För $y=f(u)$ och $u=g(x)$ kan man skriva $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Bevis

För f,g,x givna, antag först att h är sådant att $g(x+h) \neq g(x)$. Då är

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{\underbrace{g(x+h)-g(x)}_{\neq 0}} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

Sätt $r = g(x+h)-g(x)$, $r\to 0$ då $h \to 0$, ty g är kontinuerlig

$$= \frac{f(g(x)+r)-f(g(x))}{r}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}. \qquad (1)$$

Vi måste även specialbehandla fallet $g(x+h)=g(x)$ som t ex är omöjligt att undvika för funktionen $g(x)=1$.

Om $g(x+h)=g(x)$ så är

$$\frac{f(\overbrace{g(x+h)}^{=g(x)}) - f(g(x))}{h} = \frac{0}{h} = f'(g(x))\cdot\frac{0}{h} = f'(g(x))\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad (2)$$

I båda dessa fallen (1) och (2) blir alltså andra faktorn $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ och första faktorn kan vi för $u=g(x)$ skriva som en funktion

$$F_u(r) = \begin{cases} \frac{f(u+r)-f(u)}{r} & \text{om } r\neq 0, \\ f'(u) & \text{om } r=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Derivatans definition ger att $F_u(r) \to f'(u)$ då $r\to 0$ (det vill säga, F_u är kontinuerlig). Alltså ger (1), (2) och (3) tillsammans att

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \lim_{h\to 0} \underbrace{F_{g(x)}(r)}_{\to f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} = f'(g(x))\cdot g'(x),$$

vilket skulle bevisas.

Ex: $f(x) = \sqrt{x^{2/3}+7} = (x^{2/3}+7)^{\frac{1}{2}}$ $= f(g(x))$ med $f(u) = u^{\frac{1}{2}}$, $u=g(x)=x^{2/3}+7$, $f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^{2/3}+7}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}\,\sqrt{x^{2/3}+7}}$$

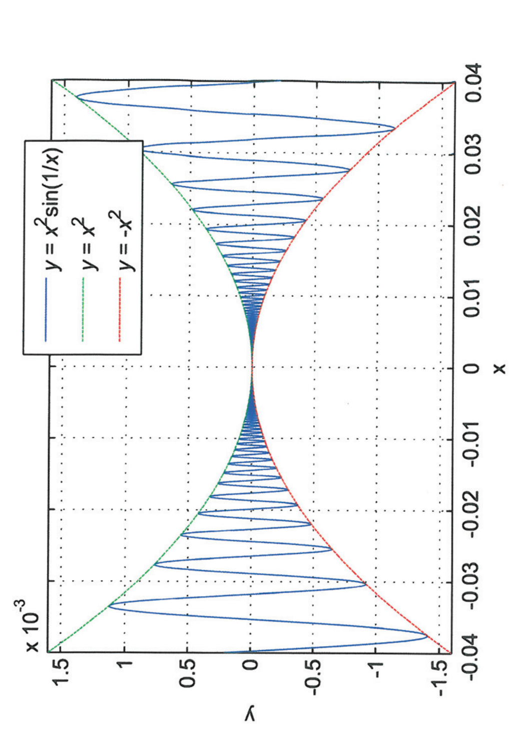
Ex: $g(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{om } x\neq 0 \\ 0 & \text{om } x=0 \end{cases}$

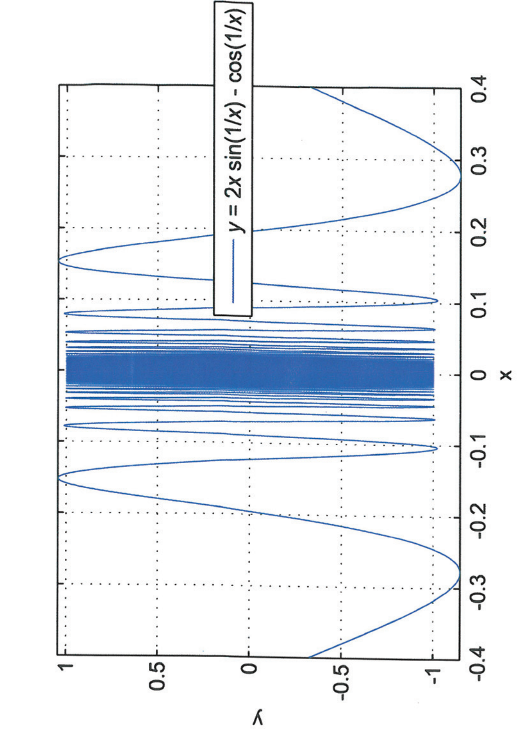
$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}\sin(\frac{1}{h})}{\cancel{h}} = 0$$ via instängningssatsen, ty $\underbrace{-|h|}_{\to 0} \le h\sin(\frac{1}{h}) \le \underbrace{|h|}_{\to 0}$

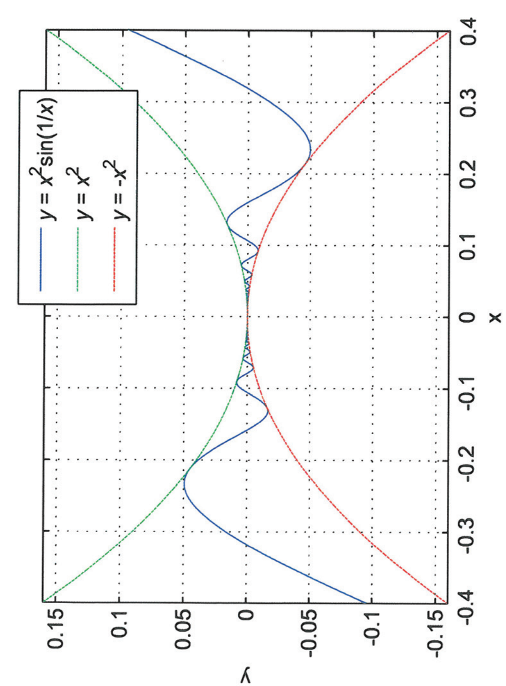
För $x\neq 0$ behöver vi veta att $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ (gymnasiekurs, samt nästa lektion) och konstatera att $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}x^{-1} = (-1)\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ så att kedjeregeln ger

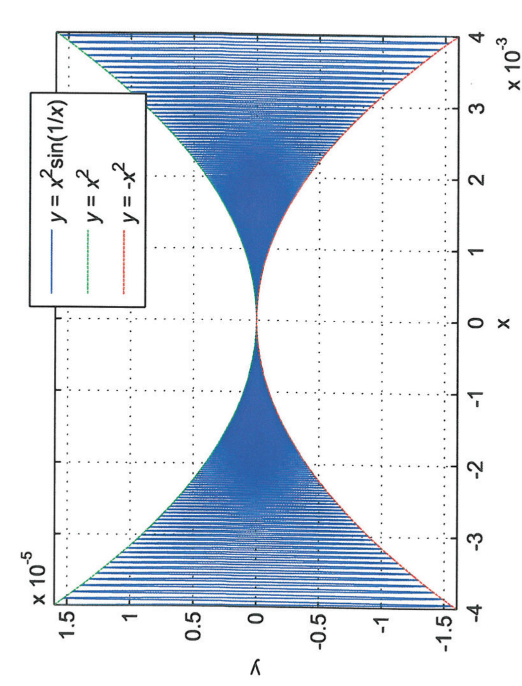
derivata av produkt

$$g'(x) = 2x\sin(\tfrac{1}{x}) + x^2\frac{d}{dx}\sin(\tfrac{1}{x}) = 2x\sin(\tfrac{1}{x}) + \cancel{x^2}\cos(\tfrac{1}{x})\cdot\left(-\tfrac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 2x\sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})$$









② 2.4.2 $y = (1-\frac{x}{3})^{99}$

Inre derivata

$$y' = 99(1-\frac{x}{3})^{98}\cdot\underbrace{(-\tfrac{1}{3})} = -33(1-\frac{x}{3})^{98}$$

2.4.12

Kom ihåg att $|x| = \begin{cases} x & \text{för } x \geq 0 \\ -x & \text{för } x<0\end{cases}$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 & \text{för } x>0 \\ -1 & \text{för } x<0 \\ \text{odefinierad för } x=0\end{cases} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{sgn}(x)$$

Eftersom differenskvoten $\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \operatorname{sgn}(h)$ har olika höger- och vänstergränsvärde.

För $y = (2+|x|^3)^{1/3}$ är alltså

Inre derivata

$$y' = \frac{1}{\cancel{3}}(2+|x|^3)^{1/3-1}\cdot\underbrace{\cancel{3}|x|^2\cdot\operatorname{sgn}(x)} =$$

Inre derivata

$$= (2+|x|^3)^{-\frac{2}{3}}|x|^{\cancel{2}}\frac{x}{\cancel{|x|}} = x|x|(2+|x|^3)^{-2/3}$$

2.4.32 Givet att $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Sökt: $f'(4)$

$f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

Inre derivata

$$f'(x) = -\frac{1}{\cancel{2}}(2x+1)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot\cancel{2} = -(2x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{(2x+1)^{3/2}}$$

$$f'(4) = -\frac{1}{(2\cdot4+1)^{3/2}} = -\frac{1}{(9^{1/2})^3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$$

Ex $f(x) = \frac{1}{1+|x|} = (1+|x|)^{-1}$

Inre derivata

$$f'(x) = -1\cdot(1+|x|)^{-1-1}\cdot\operatorname{sgn}(x) = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{(1+|x|)^2}$$

2.4.28 $y = f(2f(3f(x)))$

Inre derivata

$$y' = f'(2f(3f(x)))\cdot 2f'(3f(x))\cdot 3f'(x) = 6f'(x)f'(3f(x))f'(2f(3f(x)))$$

Inre derivata

Deriveringsexempel i Matlab

Som tidigare nämnt skall syms ej användas i Matlab-laborationen i denna kurs, men användbart i andra sammanhang:

```
syms x % skapa en variabel x för symbolisk matematik
y = 1/(1+abs(x))
Dy = diff(y, x)
```

```
y =
1/(abs(x) + 1)
Dy =
-(x + conj(x))/(2*(abs(x) + 1)^2*(x*conj(x))^(1/2))
```

För symboliska variabler gör Matlab grundantagandet att de kan vara komplexvärda. För att slippa komplexkonjugaten som dök upp här, så anger vi att variabeln är reellvärd:

```
assume(x,"real")
Dy = diff(y, x)
```

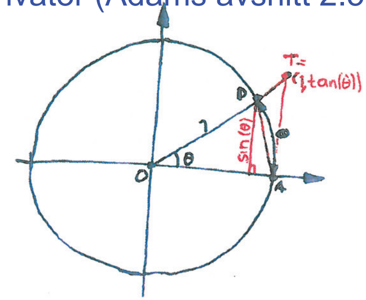
```
Dy =
-sign(x)/(abs(x) + 1)^2
```

Published with MATLAB® R2023a

Lektion 17: Trigonometriska funktioners derivator (Adams avsnitt 2.5)

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1}$$

Se räkneexempel nästa sida



Bevis: För $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ger figuren till höger att

Triangelarean OAP < Cirkelsektorarean OAP < Arean OAT

$$\frac{1\cdot\sin(\theta)}{\cancel{2}} < \pi\cdot 1^2\cdot\frac{\theta}{\cancel{2\pi}} < \frac{1\cdot\tan(\theta)}{\cancel{2}}$$

$$0<\overbrace{\sin(\theta)}^{>0} < \theta < \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$1 > \frac{\sin(\theta)}{\theta} > \cos(\theta)\to 1 \text{ då } \theta\to 0+$$

Instängningssatsen $\Rightarrow$ $\frac{\sin(\theta)}{\theta}\to 1$ då $\theta\to 0+$.

$\frac{\sin(\theta)}{\theta}$ är en jämn funktion, $\frac{\sin(\theta)}{\theta}=\frac{\sin(\theta)}{-\theta}$, så från ovanstående följer även att $\frac{\sin(\theta)}{\theta}\to 1$ då $\theta\to 0-$. Alltså fås $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1$. VSV.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)}$$

Bevis

$$\frac{d}{dx}\sin(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1}\cos(x)+\sin(x)\cdot\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0}=\cos(x)$$

eftersom

$$\frac{\cos(h)-1}{h}=\frac{2}{h}\,\frac{\cos(2\frac{h}{2})-1}{2}=-\frac{2}{h}\sin^2(\tfrac{h}{2})=-\underbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin(h/2)}_{\to 0}.$$

VSV.

- $\frac{d}{dx}\cos(x)=\frac{d}{dx}\sin(\frac{\pi}{2}-x)=-\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin(x)$.
- $\frac{d}{dx}\tan(x)=\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$
- $\frac{d}{dx}\cot(x)=\frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{(-\sin(x))\sin(x)-\cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}=\frac{1}{\sin^2(x)}$

I boken finns även uträknade derivator för $\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$ och $\csc(x)=\frac{1}{\sin(x)}$, men ni behöver inte lära er någon sådan derivata utantill, utan klarar er bra med sin, cos och tan. Övriga skall ni kunna räkna ut om/när ni behöver dem:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin(x)}=\frac{0\cdot\sin(x)-1\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}=-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos(x)}=\frac{0\cdot\cos(x)-1\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

Ex

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos(x^3)}{2+\sin(\sqrt[3]{x})}=\frac{\left(\frac{d}{dx}\cos(x^3)\right)\cdot\left(2+\sin(\sqrt[3]{x})\right)-\cos(x^3)\cdot\frac{d}{dx}\left(2+\sin(\sqrt[3]{x})\right)}{\left(2+\sin(\sqrt[3]{x})\right)^2}$$

Inre derivata   Inre derivata $=x^{\frac{1}{3}}$, $=-\frac{2}{3}$

$$=\frac{-\sin(x^3)\cdot 3x^2\cdot\left(2+\sin(\sqrt[3]{x})\right)-\cos(x^3)\cdot\cos(\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}{\left(2+\sin(\sqrt[3]{x})\right)^2}$$

Några räknenexempel för standardgränsvärdet på första sidan

L16

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$$
För x = vinkel i radianer

$x\to 0\Rightarrow\sqrt{3}x\to 0$

Ex a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sqrt{3}x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,\underbrace{\frac{\sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}}_{\to 1}\Big)^2=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cdot 1)^2=\frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2(\sqrt{x})}{x}=\lim_{x\to 0+}\Big(\underbrace{\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}_{\to 1}\Big)^2=1^2=1$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{11x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{11}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{11}\Big(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\,\frac{1}{\underbrace{\cos(x)}_{\to\cos(0)=1}}\Big)^2=\frac{1}{11}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^2=\frac{1}{11}$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(-x)}{11x}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{11}\,\underbrace{\frac{\sin(-x)}{-x}}_{\to 1}\,\frac{1}{\underbrace{\cos(-x)}_{\to 1}}=-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1}=-\frac{1}{11}$$

$$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}{2\tan(x^2)\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\,\frac{\sin(x^2)}{x^2\cos(x^2)}}=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin^2(x)}{12x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x}{12}}_{\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\Big)^2=0\cdot 1^2=0$$

g) $$\lim_{x\to 0}x\cdot\cot(2x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos(2x)}{2\,\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos(2x)}^{\to 1}}{2\cdot\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1}}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

Uppgift 2.5.46

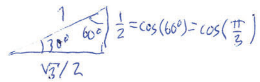
Hitta de punkter på kurvan $y = \tan(2x)$, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ där normalen är parallell med linjen $y = -\frac{x}{8}$.

$y = f(x) = \tan(2x)$ har lutning

$$y' = f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}$$

Kurvans normal i punkten $(x, f(x))$ har därför lutning $-\frac{\cos^2(2x)}{2}$ och är parallell med linjen $y = -\frac{x}{8}$ om

$$\frac{\cos^2(2x)}{2} = \frac{1}{8}$$



$$\cos(2x) = (\pm)\frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6}, \quad f(-\tfrac{\pi}{6}) = \tan(-\tfrac{\pi}{3}) = \frac{\sin(-\pi/3)}{\cos(-\frac{\pi}{3})} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = = -\sqrt{3}$$

$$f(\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{Svar: } (-\tfrac{\pi}{6}, -\sqrt{3}) \text{ och } (\tfrac{\pi}{6}, \sqrt{3})}$$

Extra räkneexempel i mån av tid (med $\sin_{\circ}$ för "sinus för vinkel angedd i grader"):

2.5.43 Bestäm ekvationen för tangentlinjen till $y = \sin_{\circ}\left(x^{\circ}\right)$ i punkten där $x = 45^{\circ}$.

Eftersom $x^{\circ} = \dfrac{\pi x}{180}$ radianer så formulerar vi om problemet till att bestämma ekvationen till

$y = f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{180}\right)$ i punkten där $x = 45$ och kan då lätt beräkna derivatan

$y' = f'(x) = \dfrac{\pi}{180}\cos\left(\dfrac{\pi x}{180}\right)$.

Tangentlinjens lutning är alltså $f'(45) = \dfrac{\pi}{180}\cos\left(\dfrac{\pi \cdot 45}{180}\right) = \dfrac{\pi}{180}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{180\sqrt{2}}$,

så tangentlinjens ekvation är $y = \dfrac{\pi}{180\sqrt{2}}x + m$. För att beräkna m sätter vi

$(x, y) = (45, f(45)) = \left(45, \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left(45, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och får $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{180\sqrt{2}} \cdot 45 + m$.

Alltså är $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$ och tangentlinjens ekvation är

$$y = \frac{\pi}{180\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{180\sqrt{2}}(x - 45) + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lektion 18: Medelvärdessatsen (Adams avsnitt 2.8) ①

Idag: Några fler egenskaper hos deriverbara funktioner.

kritisk punkt
critical point

> Om $a < c < b$, $f(x)$ definierad för $a < x < b$ och har största värde $f(c)$, och om $f(x)$ är deriverbar i punkten $x = c$ då är $f'(c) = 0$.

Bevis (Punkter x sådana att $f'(x) = 0$ kallas kritiska punkter.)

För $a < x < b$ gäller alltså att $f(x) - f(c) \leq 0$. Eftersom derivatan $f'(c)$ finns så är gränsvärdet = vänstergränsvärdet = högergränsvärdet:

$$f'(c) = \lim_{x \to c-} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{och} \quad f'(c) = \lim_{x \to c+} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\leq 0} \leq 0.$$

Rolles sats:

> Antag att g är en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b), samt att $g(a) = g(b)$. Då är $g'(c) = 0$ för något $c \in (a,b)$.

Bevis

Trivialt om $g(x) = g(a)$ för alla x i (a,b), ty då är g konstant.

Antag att $g(x) > g(a)$ för något x i (a,b). (Liknande bevis för $g(x) < g(a)$.)

Från lektion 11: Eftersom g är kontinuerlig på $[a,b]$ så har g ett maximum $g(c)$, för något c i $[a,b]$. Alltså är

$$g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b)$$

så $c \neq a$ och $c \neq b$, dvs c är i (a,b) så att derivatan $g'(c)$ finns och från resultatet ovan har vi att c är en kritisk punkt, dvs $g'(c) = 0$.

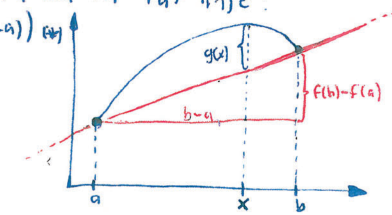
V.S.B.

> **Medelvärdessatsen**
>
> Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) så finns något c i (a,b) sådant att
>
> $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bevis

För f med de givna egenskaperna kan vi få ett g som uppfyller villkoren i Rolles sats genom att subtrahera en rät linje:

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right) \quad (*)$$



Rolles sats ger att $g'(c) = 0$ för något c i (a,b), och ur $(*)$ får vi att

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dvs att $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, VSV.

Det här var det matematiska beviset. Även "intuitivt självklart": ②

Om man t ex kör bil 100 km på en timme så kan man

1) Inte ha kört > 100 km/h hela vägen.
2) Inte ha kört < 100 km/h hela vägen

Alltså har man antingen kört exakt 100 km/h hela vägen eller så har man kört < 100 km/h någon gång och > 100 km/h någon gång längs vägen och eftersom hastigheten måste vara en kontinuerlig funktion av tiden så måste hastigheten ha varit 100 km/h någon gång därimellan.

Vad skall man då med detta till?

Växande/avtagande funktioner

Om en funktion f är definierad på ett intervall I så sägs f vara

a) (increasing) växande på I om $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ 

b) (nondecreasing) strängt växande på I om $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

c) (decreasing) avtagande på I om $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

d) (nondecreasing) strängt avtagande på I om $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Notera t ex att villkoret för att f skall uppfylla a) är att om $x_1 < x_2$ så får vi

$$f(x_1) \le f(x_2) \iff f(x_2) - f(x_1) \ge 0 \iff 0 \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \text{ för något } c \text{ mellan } x_1 \text{ och } x_2$$

alltså fås att $f(x_1) \le f(x_2)$ om $f'(c) \ge 0$ för alla c mellan x_1 och x_2

På samma sätt får vi:

a) $f'(x) \ge 0$ på $I \Rightarrow f$ växande på I

b) $f'(x) > 0$ på $I \Rightarrow f$ strängt växande på I

c) $f'(x) \le 0$ på $I \Rightarrow f$ avtagande på I

d) $f'(x) < 0$ på $I \Rightarrow f$ strängt avtagande

Villkoret "på ett intervall I" är nödvändigt! Till exempel gäller för $f(x) = \frac{1}{x}$ att $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, men f är *ej* strängt avtagande på hela sin definitionsmängd. Till exempel är $f(1) = 1 > -1 = f(-1)$. Både på $(-\infty, 1)$ och på $(1, \infty)$ gäller dock att $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strängt avtagande.

Ex: $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \begin{cases} < 0 & \text{för } x > 0 \\ > 0 & \text{för } x > 0 \end{cases}$

Alltså är f strängt avtagande då $x < 0$ och strängt växande då $x > 0$.

Ex: $f(x) = 7$

$f'(x) = 0$

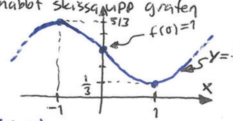
Alltså är f växande överallt och avtagande överallt. Engelska orden non increasing och nondecreasing klart bättre här

Ex: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 1$, vart är $f(x)$ strängt växande resp strängt avtagande?

$f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ Vi gör teckenstudium för $f'(x)$:

		-1		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5/3$ lok max	$\searrow$	$1/3$ lok min	$\nearrow$

Från detta kan vi även snabbt skissa upp grafen



SVAR: Strängt växande på $(-\infty, -1)$ och $(1, \infty)$. Strängt avtagande på $(-1, 1)$.

Medelvärdessatsen kan även användas för att bevisa vissa olikheter: ③

Exempel 2, sid 138 i Adams

Medelvärdessatsen för $f(x) = \sin(x)$ på $[0, x]$.

För $0 < x \le 2\pi$ så är

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{d}{dx}\sin(x)\Big|_{x=c} = \underbrace{\cos(c)}_{<1 \text{ för } 0<c<x\le 2\pi} \text{ för något } c \text{ i } (0, x)$$

Alltså är $\frac{\sin(x)}{x} < 1$ för $0 < x \le 2\pi$.

(Samma olikhet gäller även för $x \ge 2\pi$ då $\sin(x) \le 1 < 2\pi \le x$ för $x \ge 2\pi$.)

Uppgift 2.8.6

Ej på lektion nu när 2.8.7 ej längre är en utdelad hemuppgift.

Givet: $r > 1$
$x > 0$ eller $-1 < x < 0$

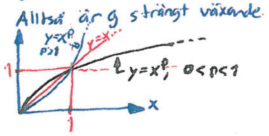
Skall visas: $(1+x)^r > 1 + rx$

Bevis

Låt $f(x) = (1+x)^r - rx - 1 \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r = r\left((1+x)^{r-1} - 1\right)$

För $x > 0$ och $p > 0$ sätt
$g(x) = x^p$
$g'(x) = px^{p-1} > 0$
Alltså är g strängt växande



Om $x > 0$ så är $f'(x) = r \cdot \underbrace{\underbrace{(1+x)}_{>1}^{\overbrace{r-1}^{>0}}}_{>1} - r > r \cdot 1 - r = 0$

Om $-1 < x < 0$ så är $f'(x) = r \underbrace{\underbrace{(1+x)}_{>0,\ <1}^{\overbrace{r-1}^{>0}}}_{>0,\ <1} - r < 0$

Alltså är f strängt avtagande om $-1 < x < 0$ och strängt växande om $x > 0$ } f har minimum $f(0) = 0$

För $x > 0$ och $-1 < x < 0$ gäller alltså att $(1+x)^r - rx - 1 = f(x) > 0$, V.S.V.

2.8.7: Samma men $0 < r < 1$

OBS! Om $f'(x) \ge 0$ i ett helt intervall men $f'(x) = 0$ bara i någon enskild punkt så är $f(x)$ strängt växande i hela intervallet (och motsvarande för $f'(x) \le 0$). Detta visades ej på förra sidan men är "intuitivt självklart" och kan bevisas på följande sätt.

	x_1		x_3	a	x_4		x_2
$f'(x)$		$+$		0		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$f(a)$		$\nearrow$	

En sådan punkt kallas terasspunkt.

Välj godtyckligt två tal $x_1 < a$ och $x_2 > a$. Vi vill nu visa att $f(x_1) < f(x_2)$. Eftersom f är strängt växande på $(-\infty, a)$ och (a, ∞) så får vi att

$$f(x_1) < f(x_3) \text{ för } x_1 < x_3 < a \quad \text{och} \quad f(x_4) < f(x_2) \text{ för } a < x_4 < x_2$$

Alltså är

$$f(x_1) < f(x_3) \le f(a) \le f(x_4) < f(x_2)$$

V.S.V.

2.8.2 Vi skall verifiera medelvärdessatsen för

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ på $[1,2]$,

$f'(x) = -1\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Det gäller alltså att finna ett $c \in (1,2)$ sådant att

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\frac{1}{2}-1}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2}$$

$$c^2 = 2 \quad \text{och } c \in (1,2)$$

SVAR: $c = \sqrt{2}$

Lektion 19: Reserv/repetition.
Till exempel önskade uppgifter eller följande uppgifter.

Diagnostiskt test 1
M0029M-HT14

Betygsgränser: 0-12 **U**, 13–17 **3**, 18-21 **4**, 22-26 **5**
Skrivtid: **240 min**
Inga hjälpmedel tillåtna.

1. Använd induktion för att bevisa

$$\sum_{k=1}^{n} k3^{-k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}, \; n \geq 1.$$

(5 p)

2. Beräkna följande gränsvärden om de existerar, i de fall gränsvärdena inte existerar motivera varför.

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x^3 - 8}$$

(2 p)

b)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^6 + 4x^3} + x^3 \right)$$

(2 p)

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 + \sin(3x)}{\tan(2x) + 3x}$$

(2 p)

3. Trigonometriska funktioner.

a) Låt $u = \tan(x/2)$. Beskriv $\cos x$ med hjälp av u. Ledning: $\cos x = \cos(x/2 + x/2) = \ldots$ (3 p)

b) Härled en formel för $\tan(u + v)$ endast innehållande $\tan u$ och $\tan v$. (2 p)

[0]Svar: 2. a) Existerar ej. b) -2, c) $4/5$, 3. a) $(1-u^2)/(1+u^2)$ b) $(\tan u + \tan v)/(1 - \tan u \tan v)$ 4. a) $x/\sqrt{x^2+1}$ b) $y = 3\pi(\pi - x)/(\pi + 1)$

4. Derivata.

a) Beräkna

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}$$

med hjälp av derivatans definition. Derivera ”som vanligt” och jämför. (3 p)

b) Låt

$$f(x) = \frac{x \sin(3x)}{x + \cos^2 x}.$$

Bestäm tangenten till $y = f(x)$ i den punkt där $x = \pi$. (2 p)

5. Lös en (och endast en) av följande uppgifter:

I) Låt f vara en funktion som är deriverbar i punkten x_0. Visa att f är kontinuerlig i x_0. Gäller omvändningen? bevisa eller ge ett motexempel.

II) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i en punkt x_0. Antag att f är deriverbar i x_0 och bestäm, med hjälp av derivatans definition,

$$\frac{d}{dx}(f(x))^2 \bigg|_{x=x_0}$$

III) Bevisa att $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$. Man får utnyttja kända gränsvärden för sin och cos.

(5 p)

1. $P_n: \quad \sum_{k=1}^{n} k\,3^{-k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}, \quad n \geq 1$

P_1: $VL = 1\cdot 3^{-1} = \frac{1}{3}$, $HL = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} - \frac{2+3}{4\cdot 3} = \frac{9-5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = VL$

Alltså P_1 sant!

Antag P_n sant. För P_{n+1} är då

$$VL = \sum_{k=1}^{n+1} k3^{-k} = (n+1)3^{-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} k3^{-k} = (n+1)3^{-(n+1)} + \frac{3}{4} - \frac{(2n+3)\cdot 3}{4\cdot 3^n \cdot 3}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3\cdot(2n+3) - 4(n+1)}{4\cdot 3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4\cdot 3^{n+1}}$$

$$HL = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4\cdot 3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4\cdot 3^{n+1}} = VL$$

Alltså $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Induktionsaxiomet $\Rightarrow$ P_n sant för $n \geq 1$.

---

2 a)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad +2x \quad +4 \\ \hline x-2 & x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \\ & -(x^3 - 2x^2) \\ \hline & 2x^2 \qquad -8 \\ & -(2x^2 - 4x) \\ \hline & 4x - 8 \\ & -(4x-8) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{|x-2|}{x-2}}_{\substack{= \operatorname{sgn}(x-2) \\ \text{inget gränsvärde}}} \cdot \overbrace{\frac{1}{x^2+2x+4}}^{\to \frac{1}{12}}$$

existerar ej!

b) $$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^6+4x^3} + x^3\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^6\left(1+4\frac{1}{x^3}\right)} + x^3\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(\underbrace{|x^3|}_{= -x^3 \text{ då } x<0}\sqrt{1+\frac{4}{x^3}} + x^3\right) = \lim_{x\to -\infty} x^3\left(\underbrace{-\sqrt{1+\frac{4}{x^3}} + 1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} x^3 \frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}} = \lim_{x\to -\infty} x^3 \frac{\cancel{1} - \left(\cancel{1}+\frac{4}{x^3}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{4}{1+\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x^3}}_{\to 0}}}$$

$$= -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2+\sin(3x)}{\tan(2x)+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{3x}\left(\frac{1}{3}(\overbrace{1+x}^{\to 1}) + \overbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}^{\to 1}\right)}{\cancel{2x}\left(\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1}\cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(2x)}}_{\to 1} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2}\cdot \frac{\frac{1}{3}+1}{1+\frac{3}{2}} =$$

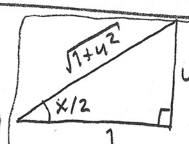
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

---

3 a) Låt $u = \tan(x/2)$. Då är

$$\cos(x) = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 =$$

$$= \frac{2 - (1+u^2)}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$



$\frac{u}{1} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

Eller:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{1}{u^2+1}$$

b) $$\tan(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)}{\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)} = \frac{\cancel{\cos(u)\cos(v)}\left(\frac{\sin(u)}{\cos(u)} + \frac{\sin(v)}{\cos(v)}\right)}{\cancel{\cos(u)\cos(v)}\left(1 - \frac{\sin(u)\sin(v)}{\cos(u)\cos(v)}\right)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u)\cdot\tan(v)}}}$$

---

4 a) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1 - (x^2+1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+1 \cancel{-x^2-1}}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Med kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

4b) $f(x) = \frac{x\sin(3x)}{x+\cos^2(x)}$, $f(\pi) = \frac{\pi\cdot 0}{\pi+1} = 0$

$$f'(x) = \frac{(1\cdot\sin(3x)+3x\cos(3x))(x+\cos^2(x)) - x\sin(3x)\cdot(1+2\cos(x)\cdot(-\sin(x)))}{(x+\cos^2(x))^2} =$$

$$f'(\pi) = \frac{-3\pi(\pi+1) - \pi\cdot 0}{(\pi+1)^2} = -\frac{3\pi}{\pi+1}$$

Tangentens ekvation: $y = -\frac{3\pi}{\pi+1}x + m$ sätt $(x,y) = (\pi,0)$

$$0 = -\frac{3\pi^2}{\pi+1} + m$$

$$m = \frac{3\pi^2}{\pi+1}$$

SVAR: $y = -\frac{3\pi}{\pi+1}x + \frac{3\pi^2}{\pi+1}$

5 I) Då $h\to 0$ så följer att

$$f(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)}\cdot\underbrace{h}_{\to 0} + f(x_0) \to f(x_0)$$

Alltså kontinuerlig. Det omvända gäller ej.

Tex så är $g(x)=|x|$ kontinuerlig, men ej deriverbar i $x=0$.

II) f deriverbar i x_0 om gränsvärdet $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existerar

$$\frac{d}{dx} f(x)^2\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)^2 - f(x_0)^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))}{h}(\overbrace{f(x_0+h)}^{\text{Deriverbar i } x_0 \Rightarrow \text{kontinuerlig i } x_0} + f(x_0))$$

$$= f'(x_0)\cdot(f(x_0)+f(x_0)) = 2f(x_0)\cdot f'(x_0)$$

III) $\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} =$

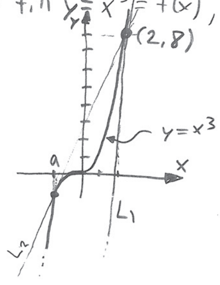
$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\cdot\overbrace{\frac{\sin(h)}{h}}^{\to 1}\right) = \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 = -\sin(x)$$

V.S.V.

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{1-\cos(2\cdot\frac{h}{2})}{2\cdot\frac{h}{2}} = \frac{\sin^2(h/2)}{h/2} = \overbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{h}{2}}^{\to 0} \to 1\cdot 0 = 0 \text{ då } h\to 0$$

Efterfrågades på lektion men hann ej lösa färdigt:

2.3.49 Finn två räta linjer som är tangent till $y = x^3 = f(x)$, $f'(x)=3x^2$ och passerar genom punkten $(2,8)$.



Lösning 1

Vi söker en tangentlinje som
- Går genom $(2,8)$
- Har lutning $f'(2)=3\cdot 4=12$

Linjens ekvation är $y = 12x+m$, sätt $(x,y)=(2,8)$

$$8 = 12\cdot 2+m$$
$$-16 = m$$
$$y = 12x-16$$

Lösning 2 Kalla tangeringspunkten $(a, f(a)) = (a, a^3)$

Vi söker nu en tangentlinje som
- går genom (a,a^3) och $(2,8)$
- har lutning $f'(a) = 3a^2$

Kombination av dessa ger att

$$3a^2 = \frac{8-a^3}{2-a}$$

$$6a^2-3a^3 = 3a^2(2-a) = 8-a^3$$

$-2a^3+6a^2-8 = 0$ Prövning ger att -1 är en rot. (*)

Alltså är $-2a^3+6a^2-8 = (a+1)\cdot p(a)$ med $p(a) = \frac{-2a^3+6a^2-8}{a+1}$

$$\begin{array}{r|l} & -2a^2+8a-8 \\ \hline a+1 & -2a^3+6a^2+0a-8 \\ & -(-2a^3-2a^2) \\ \hline & 8a^2+0a-8 \\ & -(8a^2+8a) \\ \hline & -8a-8 \\ & -(-8a-8) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$p(a) = -2a^2+8a-8 = -2\cdot(a^2-4a+4)$

(*) Kan alltså skrivas på formen

$$(a+1)\cdot(-2)\cdot(a^2-4a+4) = 0$$

$a=-1$ eller $a = 2\pm\sqrt{4-4} = 2$ Detta blir Lösning 1 igen. Redan gjort!

$$f'(a) = 3\cdot(-1)^2 = 3$$

Tangentens ekvation: $y = 3x+m$, sätt $(x,y)=(2,8)$

$$8 = 3\cdot 2+m$$
$$m = 2$$

SVAR: $y = 12x-16$ och $y = 3x+2$

Lektion 20: Tillämpningar: Högre derivator, implicit derivering m m
(Adams avsnitt 2.6-2.7, 2.9)

Andra derivatan till $y=f(x)$ är $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = y'' = f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$

Derivera en gång till så fås tredje derivatan osv

$f(x)$
$f'(x)$
$f''(x)$
$f'''(x)$
$f^{(4)}(x)$
$f^{(5)}(x)$
$\vdots$
$f^{(n)}(x)$

Uppg. 2.6.14

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\quad n=0$

$f'(x) = -2\,x^{-3}$ $\quad n=1$

$f''(x) = (-2)\cdot(-3)\,x^{-4}$ $\quad n=2$

$f'''(x) = (-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\,x^{-5}$ $\quad n=3$

$\vdots$

Gissning: $f^{(n)}(x) = (-1)^n\,(n+1)!\,x^{-(n+2)}$

Vi kallar detta påstående P_n och gör ett induktionsbevis

① Vi har redan räknat ut ovan att P_1 är sant. (Även P_0)

② Antag nu att P_n är sant.
Då gäller för P_{n+1} att

$$VL = f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n)}(x)\right) \overset{P_n}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^n\,(n+1)!\,x^{-(n+2)}\right)$$

$$= (-1)^n\,(n+1)!\cdot\underbrace{(-(n+2))}_{=(-1)\cdot(n+2)}\,x^{-(n+3)} =$$

$$= (-1)^{n+1}\,(n+1)!\,(n+2)\,x^{-(n+3)} = (-1)^{n+1}\,(n+2)!\,x^{-(n+3)}$$

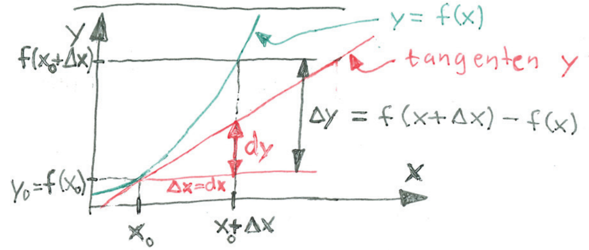
$$HL = (-1)^{n+2}\,(n+2)!\,x^{-(n+3)} = VL$$

Alltså har vi visat att $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

③ Induktionsaxiomet ger att P_n är sant för alla $n \geq 1$ heltal $n \geq 1$. (Även för $n=0$)

Differentialer

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} \\ y-y_0 &\approx f'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}}$$



För små förändringar $\Delta x = dx$ är $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\,dx$

Ofta används dx och dy som beteckningar för "oändligt små" eller med finare ord infinitesimala förändringar, differentialer.

Δy absolut förändring. Motsvarande relativ förändring är

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{dy}{y_0} = \frac{f'(x_0)\,dx}{f(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\,dx}$$

Exempel För en sfäriskt formad ballong med radie r är volymen

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V'(r) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}r^2 = 4\pi r^2 \quad \text{(Förändringshastighet/rate of change)}$$

Om radien ökar med 1%, hur många procent ökar då volymen med? För små förändringar $\frac{dr}{r} = 0{,}01$ kan vi approximera med tangenten och räkna med differentialer.
Relativ volymförändring blir då

$$\frac{dV}{V} = \frac{V'(r)}{V(r)}\,dr = \frac{\cancel{4\pi}\,r^2}{\cancel{\frac{4}{3}\pi}\,r^3}\,dr = 3\,\frac{dr}{r} = 3\cdot 0{,}01 = 0{,}03.$$

SVAR: Ungefär 3%.

Implicit derivering

Kanske denna, kanske bättre gå direkt till nästa?

Ex: Givet att $y^5 = \frac{2 - x^3 y}{x}$, hur kan man räkna ut $y'(x)$?

Knepigt lösa ut y som funktion av x.

$$xy^5 = 2 - x^3 y \qquad x^3y - xy^5 - 2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}(xy^5) = \frac{d}{dx}(2 - x^3 y)$$

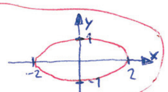
$$1\cdot y(x)^5 + x\cdot 5(y(x))^4 y'(x) = -(3x^2\cdot y(x) + x^3\cdot y'(x))$$

$$(5xy^4 + x^3)y' = -3x^2y - y^5$$

$$y' = -\frac{3x^2y + y^5}{5xy^4 + x^3}$$

Uppgift 2.9.18

Ellipsen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$



$x^2 + 4y^2 = 4$, $y'' = ?$ Bestäm y'' som en funktion av y och x.

$$2x + 4\cdot 2y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

$$\cancel{2}^{1} + \cancel{8}^{4}(y'y' + yy'') = 0$$

$$4yy'' = -1 - 4(y')^2$$

$$y'' = -\frac{1 + 4(y')^2}{4y} = -\frac{1}{4y} - \frac{1}{y}\cdot\frac{x^2}{16y^2} = -\frac{1}{4y} - \frac{x^2}{16y^3} = -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3} = -\frac{4}{16y^3}$$

$$= -\frac{1}{4y^3}$$

Vad blir då $y''(\frac{1}{3})$? $x = \frac{1}{3} \Rightarrow 4y^2 = 4 - \frac{1}{9}$

$$y^2 = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{35}{36}}, \quad y''(x) = -\frac{1}{4y^3} = \mp\frac{1}{\sqrt{\frac{35}{36}}^3}$$

Alternativ lösning: Lös ut $y(x)$ och derivera två gånger

$$4y^2 = 4 - x^2$$

$$y^2 = \frac{4 - x^2}{4} = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Definitionsmängd: $x^2 < 4$, $|x| < 2$

$$y' = \pm\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 2x = \mp\frac{1}{4}x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \mp\frac{1}{4}\left(1\cdot\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 2x\right)$$

$$= \mp\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} + \frac{x^2}{4}\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{3/2}}\right)$$

Vad blir då $y(\frac{1}{3})$?

$$y''\left(\tfrac{1}{3}\right) = \mp\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{36}}} + \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{36}\right)^{3/2}}\right) = \mp\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\frac{35}{36}}^2}{\left(\frac{35}{36}\right)^{3/2}} + \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{\left(\frac{35}{36}\right)^{3/2}}\right) = \mp\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{35}{36} + \frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{35}{36}}^3}$$

$= \frac{35}{36}$

$$y''\left(\tfrac{1}{3}\right) = \mp\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{35}{36}}^3}$$

samma som vi fick via implicit derivering på tavlan ovanför

Översta exemplet med implicit derivering direkt:

Ex: Beräkna y'

$$y(x)^5 = \frac{2 - x^3 y(x)}{x}$$

$$5y(x)^4\cdot y'(x) = \frac{-(3x^2y(x) + x^3y'(x))x - (2 - x^3y(x))\cdot 1}{x^2}$$

$$5y^4y' = \frac{-3x^3y - x^4y' - 2 + x^3y}{x^2} = \frac{-2 - 2x^3y - x^4y'}{x^2}$$

$$5x^2y^4y' = -2 - 2x^3y - x^4y'$$

$$y'(x^4 + 5x^2y^4) = -2(1 + x^3y)$$

$$y' = -\frac{2(1 + x^3y)}{x^4 + 5x^2y^4}$$

I lektionsplaneringen räknade jag lite annorlunda och fick svaret

$$y' = -\frac{3x^2y + y^5}{5xy^4 + x^3} = -\frac{\left(3x^2y + \frac{2 - x^3y}{x}\right)\cdot x}{(5xy^4 + x^3)\cdot x} = $$

$$= -\frac{3x^3y + 2 - x^3y}{5x^2y^4 + x^4} = -\frac{2x^3y + 2}{5x^2y^4 + x^4}$$

samma!

Lektion 21, några extra räkneexempel för bland annat implicit derivering

2.9.14 Bestäm ekvationen för tangenten genom $(-\pi, \frac{1}{2})$ för **kurvan** med ekvation

$$\tan(x\,y(x)^2) = \frac{2x\,y(x)}{\pi}. \quad (*)$$

$$\Downarrow \frac{d}{dx}$$

$$\frac{1\cdot y^2 + x\cdot 2y\cdot y'}{\cos^2(xy^2)} = \frac{2}{\pi}(1\cdot y + xy') \quad (1)$$

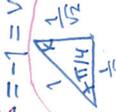
Kontroll: Ligger $(-\pi, \frac{1}{2})$ på kurvan?

För $(*)$ med $(x,y) = (-\pi, \frac{1}{2})$ är

$VL = \tan(-\pi\cdot\frac{1}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4}) = -1$

$HL = \frac{\cancel{2}\cdot(-\pi)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}{\pi} = -1 = VL$

Stämmer!



$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$$

sätt in $(x,y) = (-\pi, \frac{1}{2})$ i (1)

$$\frac{2\cdot(\frac{1}{4} - \pi y')}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - \cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}y'}{\cos^2(-\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \pi y'\right)$$

$$\frac{1}{2} - 2\pi y' = \frac{1}{\pi} - 2y'$$

$$2\pi\cdot 2y'(1 - \pi) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)2\pi$$

$$4\pi(1 - \pi)y' = 2 - \pi$$

$$y' = \frac{2 - \pi}{4\pi(1 - \pi)} \quad \text{i punkten } (-\pi, \tfrac{1}{2})$$

Enligt formeln på Lektion 20, sid ②

Tangentens ekvation: $y = y(-\pi) + y'(-\pi)(x - (-\pi))$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{2 - \pi}{4\pi(1 - \pi)}(x + \pi)$$

2.10.7 $\int \tan(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}}\cancel{\cos(x)}\,dx = -\cos(x) + C$

2.10.34

$$\begin{cases} y' = \sin(2x) & (1) \\ y(\pi/2) = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow y(x) = -\cos(2x)\cdot\frac{1}{2} + C \overset{(2)}{\Rightarrow} 1 = -\frac{1}{2}\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + C = \frac{1}{2} + C$$

$$\Downarrow$$

$$C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

SVAR: $y(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$

Lektion 21: Primitiva funktioner. Hastighet, fart och acceleration (Adams avsnitt 2.10-2.11)

Om $F'(x) = f(x)$ så kallar vi F en primitiv funktion (antiderivative) till $f(x)$. För varje konstant C är $\frac{d}{dx}(F(x)+C) = f(x)$. För alla dessa primitiva funktioner används beteckningen

=Obestämda integralen av f(x)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

för godtycklig konstant C och F sådan att $F'(x) = f(x)$.

Exempel från sid 149 i Adams:

(a) $\int dx = \int 1\,dx = x + C$ (b) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

(c) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ (d) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

(e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$ (f) $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$

(g) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (h) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(i) $\int \overset{1/\cos^2(x)}{\cancel{\sec^2 x}}\,dx = \tan x + C$ (j) $\int \overset{1/\sin^2(x)}{\cancel{\csc^2 x}}\,dx = -\cot x + C$

(k) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ (l) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

Dessa två senare (LP2) via inre derivata (visas på OH)

Uppgift 2.10.24

$\frac{d}{dx}\cos(2x) = -\sin(2x)\cdot 2$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2\sin(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Uppgift 2.10.35

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \tan(x) + C, \quad \text{sätt } (x,y) = (0,1)$$

$$1 = \tan(0) + C = C$$

Alltså $y(x) = \tan(x) + 1$

Ex Andraderivatan

Jordens gravitationskraft är ca 9,8 m/s². Om man slänger en sten rakt upp i luften och betecknar stenens höjd $h(t)$ så innebär detta att andraderivatan

$h''(t) = -9{,}8$ Minustecken innebär acceleration nedåt, med horisontalplanet då höjd $h=0$.

$h'(t) = -9{,}8t + v_0$, med konstanten v_0 = hastigheten då $t=0$

$h(t) = -9{,}8\frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0$, konstanten $h_0 = h(0)$ = höjden vid $t=0$.

Om stenen till exempel slängs rakt uppåt från höjden 0 vid $t=0$ med starthastighet 19,6 m/s rakt uppåt så är höjden

$h(t) = 19{,}6t - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ Läge

$h'(t) = 19{,}6 - 9{,}8t$ Hastighet

$h''(t) = -9{,}8$ Acceleration

Start- och slutpunkt:

$0 = h(t) = 19{,}6t - 9{,}8\frac{t^2}{2} = (19{,}6 - 9{,}8t)t$

$t = 0$ eller $19{,}6 - \frac{9{,}8}{2}t = 0$, $t = \frac{2\cdot 19{,}6}{9{,}8} = 4$ sekunder, $h'(4) = 19{,}6 - 9{,}8\cdot 4 = -19{,}6$ m/s

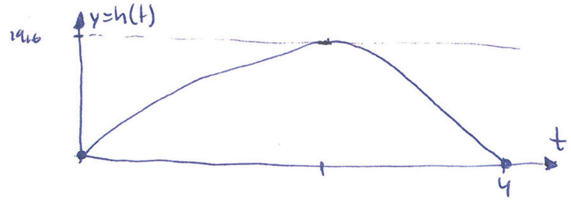
Vändpunkt:

$0 = h'(t) = 19{,}6 - 9{,}8t$

$t = 2$ sekunder, $h(2) = 19{,}6\cdot 2 - 9{,}8\cdot\frac{2^2}{2} = 19{,}6\cdot 2 - 19{,}6 = 19{,}6$ m

t	0		2		4
Läge $h(t)$	0	↗	19,6	↘	0
Hastighet $h'(t)$	19,6	+	0	−	−19,6
Acceleration $h''(t)$	−9,8	−9,8	−9,8	−9,8	−9,8

Negativ acceleration = avtagande hastighet

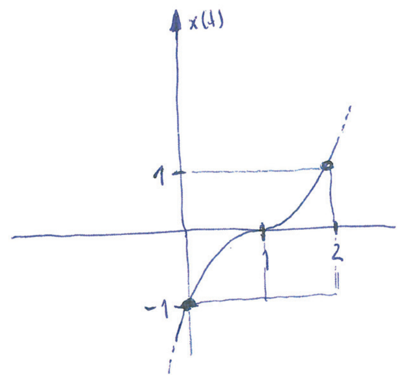


Ex: $x(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3$

$x'(t) = 3(t-1)^2$

$x''(t) = 6(t-1)$

t		1	
$x''(t)$	−	0	+
$x'(t)$	+	0	+
$x(t)$	↗	0	↗



Lektion 22-23: Inverterbara funktioner och derivata av invers (Adams avsnitt 3.1)

① ②

<u>Kom ihåg</u>: En <u>funktion</u> f avbildar varje x i sin definitionsmängd på exakt ett tal y i sin värdemängd, d v s varje lodrät linje skär funktionens graf i maximalt en punkt.

Om även alla <u>vågräta</u> linjer skär grafen i maximalt en punkt så kallas f 1-1 (one-to-one) eller injektiv.

Detta innebär att inget möjligt y-värde kan fås från mer än ett x-värde:

Definitionen av negationen av en utsaga innebär att utsagan $A \Rightarrow B$ är ekvivalent med utsagan *icke-B* $\Rightarrow$ *icke-A*.(Från "Derivator, integraler och sånt", Avsnitt 1.2.)

<u>Definition</u>: En funktion f kallas <u>1-1</u> om

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

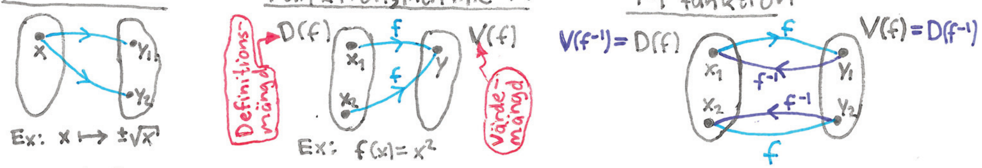
Med andra ord:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

<u>Viktig egenskap</u>: Om en funktion f är 1-1 så kallas f <u>inverterbar</u> och har en så-kallad <u>invers funktion</u> f^{-1} sådan att

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

<u>Inte funktion</u> — <u>Funktion, men inte 1-1</u> — <u>1-1 funktion</u>



Vi får:

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ f(f^{-1}(y)) &= y \end{aligned}}$$

<u>Exempel från proppkursen</u>

$f(x) = e^x$ har invers $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$e^{\ln(y)} = y$, $\ln(e^x) = x$

<u>Ex:</u>
- $g(x) = x^2$ är ej 1-1, ty $g(-1) = g(1) = 1$
- $h(x) = x^2$, $x \geq 0$ är dock 1-1

Bevis: Antag att $h(x_1) = h(x_2)$

$$\Updownarrow$$

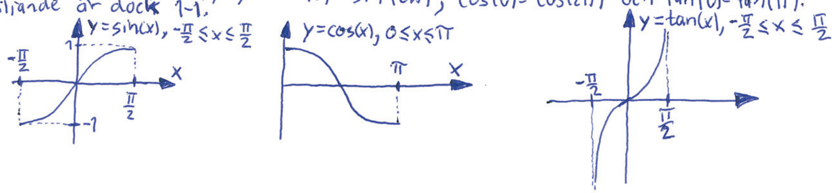
$$x_1^2 = x_2^2, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\Updownarrow \quad \text{Eftersom } x_1, x_2 \geq 0$$

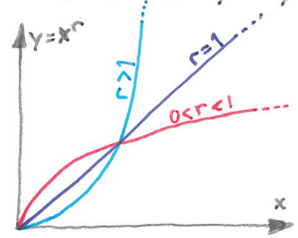
$x_1 = x_2$, alltså är h 1-1

- sin, cos, tan ej 1-1, ty $\sin(0) = \sin(2\pi)$, $\cos(0) = \cos(2\pi)$ och $\tan(0) = \tan(\pi)$.

Följande är dock 1-1:



Ex: $f(x) = x^r$, $x \geq 0$, $r > 0$ är 1-1



Vi har här att $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$

$f^{-1}(f(x)) = (x^r)^{\frac{1}{r}} = x$

$f(f^{-1}(y)) = (y^{\frac{1}{r}})^r = y$

$D(f) = V(f^{-1}) = (0, \infty)$

$V(f) = D(f^{-1}) = (0, \infty)$

Om en funktion f är strängt växande på hela sin definitionsmängd D(f) (alternativt om f är strängt avtagande på D(f)) så är f 1-1 och alltså inverterbar. (*)

<u>Bevis</u> Strängt växande innebär per definition att

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \qquad (**)$$

Antag nu att $f(x_1) = f(x_2)$. Då <u>måste</u> $x_1 = x_2$, för annars ger (**) antingen att $f(x_1) < f(x_2)$ eller att $f(x_2) < f(x_1)$.

V.S.V.

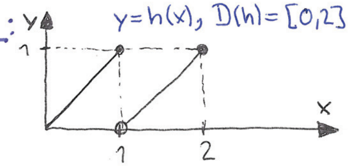
<u>Observera!</u> Om D(f) är <u>ett intervall</u> i (*) så är f strängt växande om f är deriverbar och $f'(x) > 0$ på D(f) (alternativt strängt avtagande om $f'(x) < 0$ på D(f)).

Här är det dock ett viktigt villkor att D(f) är ett intervall!

Uppenbart för $f(x) = \tan(x)$, $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 1 > 0$ men f är ej strängt växande och ej 1-1.

<u>Annat exempel</u>: $y = h(x)$, $D(h) = [0, 2]$



D(h) är ett intervall, men h är ej strängt växande (t ex är $f(0{,}9) > f(1{,}1)$) och ej 1-1.

<u>Ex</u>: För $f(x) = x^r$, $x > 0$, $r > 1$ är

$$f'(x) = r x^{r-1} > 0.$$

Alltså är f(x) strängt växande på sin definitionsmängd, så (*) ger att f är 1-1.

③

Uppgift 3.1.18

Givet: f är en inverterbar funktion med invers f^{-1}

Sökt: Inversa funktionen g^{-1} för $g(x) = \frac{f(x)-3}{2}$

$$y = g(x) = \frac{f(x)-3}{2} \iff x = g^{-1}(y)$$
$$2y = f(x)-3$$
$$2y+3 = f(x) \iff x = f^{-1}(2y+3)$$

Ta-da!

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = f^{-1}(2y+3)$$

Uppgift 3.1.10 Visa att $f(x) = \frac{x}{1+x}$ är 1-1. Beräkna f^{-1}, samt bestämd definitions- och värdemängd för f och f^{-1}.

$f(x) = \frac{x}{1+x}$ har definitionsmängd $= D(f) = R(f^{-1}) = (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$

= alla reella tal utom −1.

≠ ett intervall, så derivatans tecken säger inget om 1-1 eller inte

För att visa att f är 1-1 sätter vi

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$$
$$\Downarrow$$
$$x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1)$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 + \cancel{x_1x_2} = x_2 + \cancel{x_1x_2}$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = x_2$$

Alltså är f 1-1. Inversen kan vi räkna ut från ekvivalensen

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$
$$y = \frac{x}{1+x}$$
$$y(1+x) = x$$
$$y + xy = x$$
$$y = x(1-y)$$

går att lösa om $y \neq 1$

$$\frac{y}{1-y} = x = f^{-1}(y), \quad D(f^{-1}) = R(f)$$

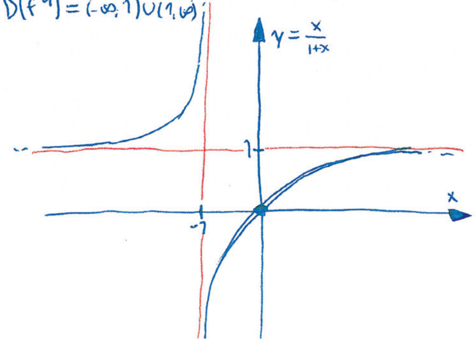
alla reella tal utom $y=1$

$= (-\infty,1) \cup (1,\infty)$.

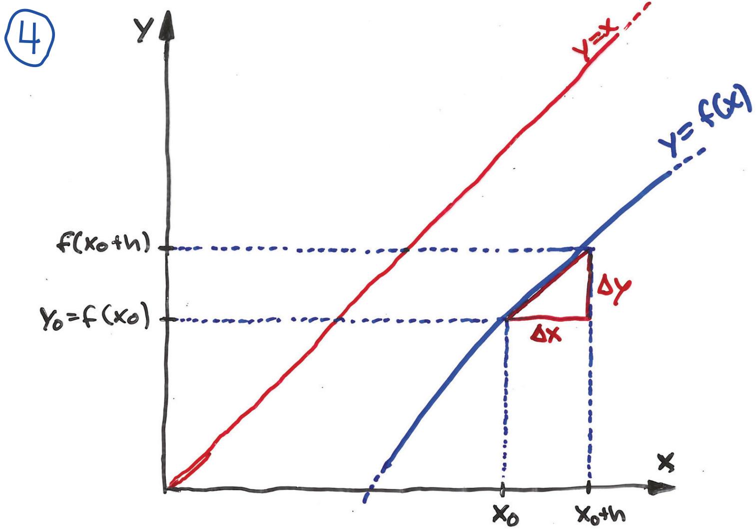
och $V(f) = D(f^{-1}) = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

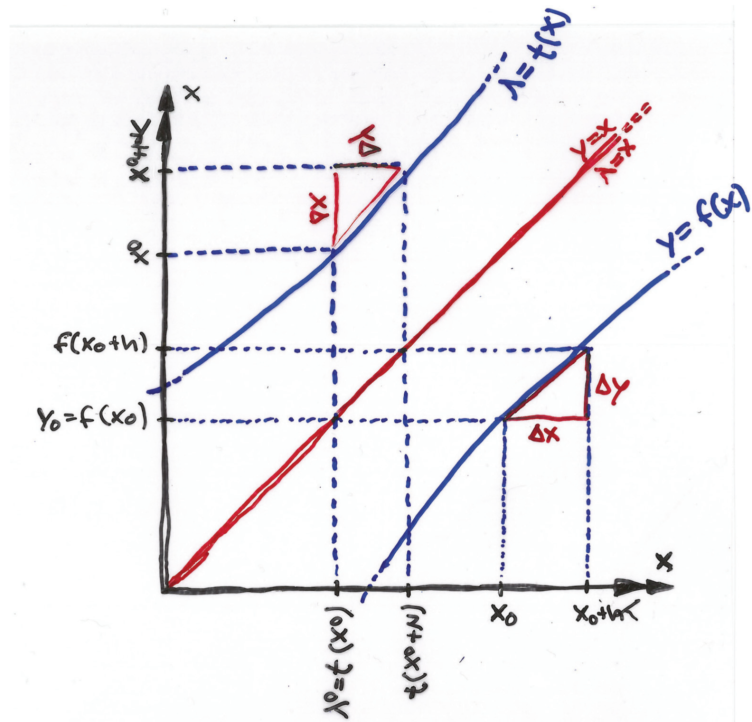
x	$\to -\infty$		-1		0		$\to \infty$
$f(x)$	$\to 1$	↗	∄	↗	0	↗	1
$f'(x)$	+	+	∄	+	+	+	+



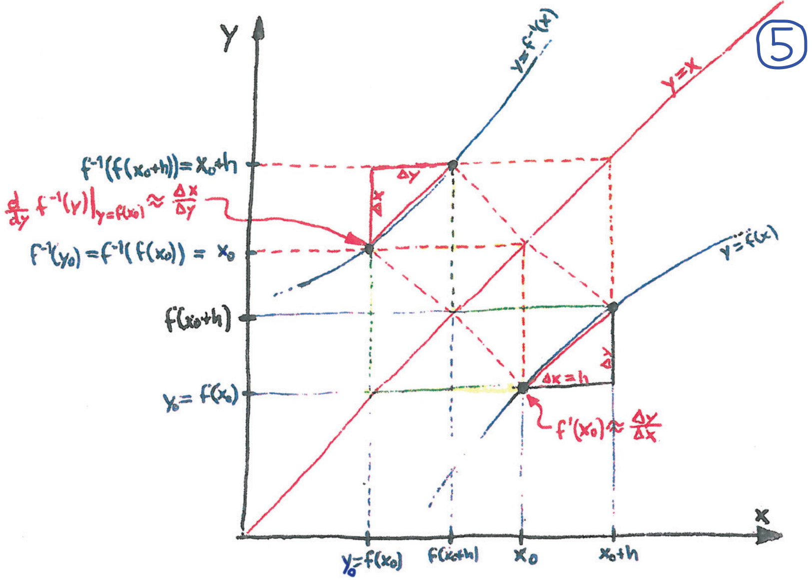
④



Spegling i linjen y=x motsvarar att skriva om till x som funktion av y och ger därför grafen för f^{-1}. Jämförelse av de två trianglarna nedan ger grafiskt ett samband mellan derivatorna för en funktion och dess invers. När man räknar härleds detta samband relativt enkelt med implicit derivering och kedjeregeln som på följande sidor.



5



Från funktionsgrafen ser vi att $y = f^{-1}(x)$ är reflektionen av grafen $y = f(x)$ i linjen $y = x$. Låter vi $\Delta x \to 0$ så verkar det även som att

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y)\Big|_{y_0=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \underset{x_0=f^{-1}(y)}{=} \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Det senare kan även visas direkt från kedjeregeln, om vi t ex antar att f är definierad på ett intervall $[a,b]$ och deriverbar i (a,b) och $f'(x) < 0$ för $a<x<b$ (eller att $f'(x) > 0$ för $a<x<b$. I båda fallen vet vi från förra lektionen att f är 1-1 och alltså är inverterbar, och har en icke vågrät tangent i x för $a<x<b$, så f^{-1} har en icke lodrät tangent i varje punkt på sin funktionskurva, dvs deriverbar med lutning $-\infty < (f^{-1})'(y) < \infty$, och för deriverbart f och f^{-1} kan vi använda kedjeregeln på

$$y = f(f^{-1}(y)) \qquad \text{eller} \qquad x = f^{-1}(f(x))$$

$$\Downarrow \text{ derivera, } \tfrac{d}{dy} \qquad\qquad \Downarrow \tfrac{d}{dx}$$

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \qquad\qquad 1 = (f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_{=y}) \cdot f'(\underbrace{x}_{=f^{-1}(y)})$$

$$\boxed{\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \qquad\qquad \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Ex: $y = f(x) = x^3 + x - 9$ Beräkna $(f^{-1})'(-7)$.

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ för alla x, så f är strängt växande och alltså inverterbar.

$y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ Derivera, $\frac{d}{dy}$

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) \Longrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2+1} = \frac{1}{3 \cdot (f^{-1}(y))^2 + 1}$$

$$f^{-1}(-7) = x \Leftrightarrow -7 = f(x) = x^3 + x - 9 \Leftrightarrow x = 1, \text{ så } (f^{-1})'(-7) = \frac{1}{3x^2+1} = \frac{1}{4}.$$

6 Ex $y = f(x) = x + \sin(x)$ Beräkna $(f^{-1})'\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

$f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$ och $= 0$ enbart för $x = n\pi$, n heltal

så f är strängt växande, 1-1 och inverterbar,

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \qquad \text{derivera, } \frac{d}{dy}$$

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$(f^{-1})'\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)},$$ där vi kan utnyttja att $x = f^{-1}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 1+\frac{\pi}{2} = f(x) = x + \sin(x)$.

Prövning ger att $f^{-1}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = x = \frac{\pi}{2}$, så att $(f^{-1})'\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1.$

Ex På förra lektionen visades $f(x) = \frac{x}{1+x}$ är inverterbar $(x \neq -1)$ och

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y} \qquad (y \neq 1) \qquad (1)$$

Vi har även att $f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ (2)

Alltså fås från $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ att

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \text{sätt in (1) och (2)}$$

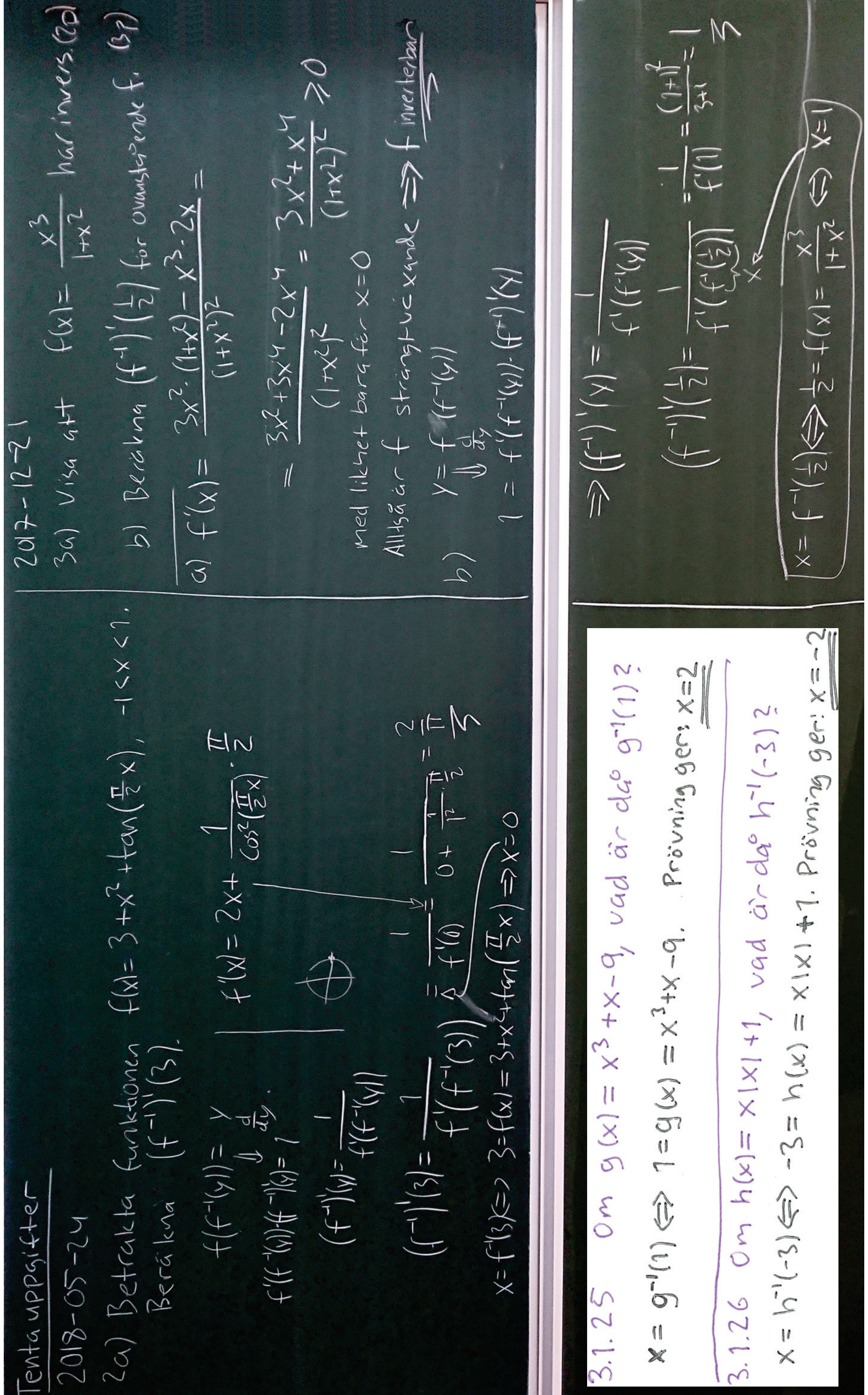
$$(f^{-1})'(y) = \left(1 + \frac{y}{1-y}\right)^2 = \left(\frac{1-y+y}{1-y}\right)^2 = \frac{1}{(1-y)^2}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(1-y)^2}}$$

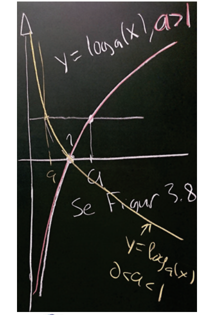
Här kan vi förstås lika gärna derivera (1) och direkt få

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1 \cdot (1-y) - y \cdot (-1)}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

Några gamla tentauppgifter



Lektion 24: Exponentialfunktioner och logaritmer (Adams avsnitt 3.2)



För $a>0$ är

$$a^0=1$$
$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \cdots\ \cdot a}_{n\text{ faktorer}}$$
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$
$$a^{m/n} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{för rationella tal } \frac{m}{n}.$$

För att t ex definiera vad som menas med a^{π} eller $a^{\sqrt{2}}$ så kan man definiera

$$\boxed{\text{Exponentiell funktion: } a^x = \lim_{\substack{r\to x\\ r \text{ rationellt}}} a^r} \qquad \boxed{\text{Logaritm: } y=a^x \iff x=\log_a(y)}$$

Sätt $u=a^x \iff x=\log_a(u)$
$v=a^y \iff y=\log_a(v)$

Räknelagar

$a^0=1,\ a^1=a \iff \log_a(1)=0,\ \log_a(a)=1$

$a^{x+y}=a^xa^y \iff x+y=\log_a(a^xa^y) \iff \log_a(u)+\log_a(v)=\log_a(uv)$

$a^{-x}=\frac{1}{a^x} \iff -x=\log_a\left(\frac{1}{a^x}\right) \iff -\log_a(u)=\log_a\left(\frac{1}{u}\right)$

$(a^x)^y=a^{xy} \iff xy=\log_a((a^x)^y) \iff y\log_a(u)=\log_a(u^y)$

$(ab)^x=a^xb^x$

$\log_a(u)=\frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$

$$\log_b(u)=\log_b(a^x)=x\log_b(a)=\log_a(u)\log_b(a)$$

Ex: $\log_{1/7}(7^{3x}) = \log_{1/7}(7^{(-1)(-3x)}) =$
$= \log_{1/7}((7^{-1})^{-3x}) = \log_{1/7}\left(\left(\tfrac{1}{7}\right)^{-3x}\right) = -3x$

Alternativt: $\log_a(b)\cdot\log_b(a)=\cancel{\log_a(b)}\cdot\frac{\overbrace{\log_a(a)}^{=1}}{\cancel{\log_a(b)}}=1$

3.2.11: $\log_a(b)\ \log_b(a) = \log_a(b^{\log_b(a)}) = \log_a(a)=1$

3.2.14: $\log_{15}(75)+\log_{15}(3) = \log_{15}(3\cdot 75) = \log_{15}(225) = \log_{15}(15^2)$
$=2$

3.2.30: Lös ekvationen $2\log_3(x)+\log_9(x)=10$

Utdelad hemuppgift och därför ej på lektion i M0047M.

$(\log_3(9)=\log_3(3^2)=2)$

$2\log_3(x)+\frac{\log_3(x)}{\log_3(9)}=10$

$2\log_3(x)+\frac{1}{2}\log_3(x)=10$

$\log_3(x^2)+\log_3(x^{\frac{1}{2}})=10$

$\log_3(x^2\cdot x^{\frac{1}{2}})=10$

$\log_3(x^{5/2})=10$

$x^{5/2}=3^{\log_3(x^{5/2})}=3^{10}$

$x=(3^{10})^{2/5}=3^{10\cdot\frac{2}{5}}=3^{\frac{20}{5}}=3^4=9\cdot 9=\underline{\underline{81}}.$

Alternativt (kortare men mindre övning på dagens räkneregler)

$\left(2+\frac{1}{2}\right)\log_3(x)=10$

$\log_3(x)=\frac{2}{5}\cdot 10=4$

$x=3^4=9\cdot 9=81$

Ex: $2^n = 16\,384$

$n=\log_2(2^n)=\log_2(16384)$

På en miniräknare finns kanske $\log_{10}$ och $\ln=\log_e$, men inte $\log_2$:

$n=\log_2(16384)=\frac{\log_{10}(16384)}{\log_{10}(2)}=14$

Ex Lös ekvationen $2\log_9(x) + \log_3(x-2) = 1$ ← VL definierat för $x>0$ och $x-2>0$, dvs för $\underline{x>2}$.

$$\frac{2\log_3(x)}{\underbrace{\log_3(9)}_{=2}} + \log_3(x-2) = 1 \qquad (9=3^2)$$

$$\log_3(x) + \log_3(x-2) = 1$$

$$3^{\log_3(x(x-2))} = 3^1$$

$$x(x-2) = 3^1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2, \quad x>2$$

SVAR: $x = 3$

3.2.10 Förenkla $x^{1/\log_a(x)}$

$$x^{1/\log_a(x)} = a^{\log_a\left(x^{1/\log_a(x)}\right)} = a^{\frac{1}{\log_a(x)}\log_a(x)} = a^1 = \underline{\underline{a}}$$

3.2.12 Förenkla $\log_x(x\log_y(y^2))$.

$$\log_x(x\log_y(y^2)) = \log_x(2x) = \log_x(2) + \log_x(x) =$$
$$= 1 + \log_x(2) = 1 + \frac{\log_2(2)}{\log_2(x)} = \underline{\underline{1 + \frac{1}{\log_2(x)}}}$$

Exempel Lös ekvationen $\dfrac{\lg(2x)}{\lg(4x-15)} = 2$, där $\lg(x) = \log_{10}(x)$.

Vänsterledet är definierat då $2x>0$, $x > \frac{15}{4}$ och $4x-15 \neq 1$, det vill säga då $x > \frac{15}{4}$ och $x \neq \frac{16}{4} = 4$. (1)

Ekvationen vi vill lösa kan då skrivas på formen

$$\lg(2x) = 2\lg((4x-15))$$

$$10^{\lg(2x)} = 10^{\lg((4x-15)^2)}$$

$$2x = (4x-15)^2 = 16x^2 - 120x + 225$$

$$0 = 16x^2 - 122x + 225$$

$$0 = x^2 - \frac{61}{8}x + \frac{225}{16}$$

$$x = \frac{61}{16} \pm \sqrt{\frac{61^2}{16^2} - \frac{225}{16}} = \frac{61}{16} \pm \frac{\sqrt{61^2 - 15^2\cdot 16}}{16} = \frac{61 \pm \sqrt{61^2 - 15^2\cdot 4^2}}{16} =$$
$$= \frac{61 \pm \sqrt{61^2 - 60^2}}{16} = \frac{61 \pm \sqrt{(61-60)(61+60)}}{16} = \frac{61 \pm \sqrt{121}}{16} = \frac{61 \pm 11}{16}$$

$\cancel{x = \frac{50}{16} = \frac{25}{8} < \frac{30}{8} = \frac{15}{4}}$ eller $x = \frac{72}{16} = \frac{9}{2} = \underbrace{\frac{18}{4} > \frac{15}{4}}_{\text{Uppfyller (1)}}$

Uppfyller ej (1)

SVAR $\frac{9}{2}$

Tillämpningsexempel (ränta på ränta):

Ex: Om man stoppar in 100 kr på bankkonto, vilken ränta skulle behövas för att efter 10 år ha 200 kr?

Vill lösa ekvationen

$$200 = 100\cdot r^{10}$$
$$2^{\frac{1}{10}} = (r^{10})^{\frac{1}{10}}$$
$$r = 2^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}0718.$$

Svar: 7,18 % ränta

Ex: 10% ränta

Efter 1 år: $100\cdot 1{,}10$

2 år: $100\cdot(1{,}10)^2$

$\vdots$

10 år $100\cdot(1{,}10)^{10}$

Ex: 100 kr sätts in på ett konto med 0,95% ränta. Efter hur många år har summan vuxit till 200 kr?

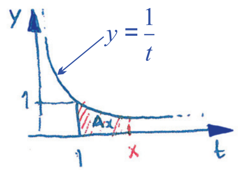
$$200 = 100\cdot(1{,}0095)^n$$
$$2 = 1{,}0095^n$$
$$\log_{1{,}0095}(2) = \log_{1{,}0095}(1{,}0095^n)$$
$$n = \log_{1{,}0095}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0095)} \approx 73{,}3 \text{ år}$$

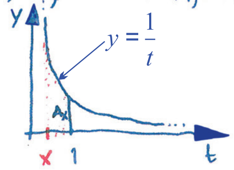
Lektion 25-26: Naturliga logaritmen, exponentialfunktionen och dess derivator (Adams avsnitt 3.3)

Vi har räknat lite med logaritmer men ännu utan att definiera $\ln(x)$ och talet e i e^x. Vi ska nu göra detta genom att först definiera $\ln(x)$.

Definition

För $x>0$, låt A_x vara arean instängd mellan linjerna $y=0$, $y=\frac{1}{t}$, $t=1$ och $t=x$





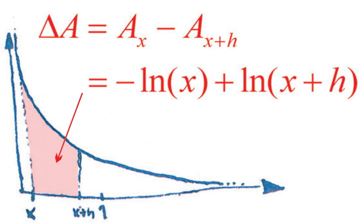
Vi definierar

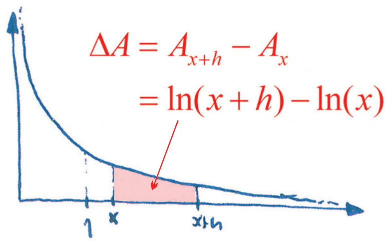
$$\ln(x) = \begin{cases} A_x & \text{för } x \geq 1 \\ -A_x & \text{för } 0 < x < 1 \end{cases}$$

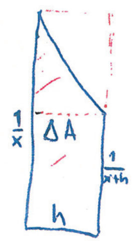
Integraler definieras först i senare kapitel i boken (nästa läsperiod). Annars hade vi kunnat göra en enklare definition $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Sats 1 $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

Bevis







$$\frac{h}{x+h} \leq \Delta A \leq \frac{h}{x}$$

$$\frac{h}{x+h} \leq \ln(x+h) - \ln(x) \leq \frac{h}{x}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x+h}}_{\to \frac{1}{x} \text{ då } h\to 0+} \leq \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \leq \frac{1}{x}$$

Instängningssatsen ger att $\lim_{h\to 0+} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$

Samma för negativa h, både täljare och nämnare byter tecken. VSB.

Sats 2

(i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ (ii) $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

(iii) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ (iv) $\ln(x^r) = r\ln(x)$

Bevis

(i) se boken

(ii) Specialfall av (iii)

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\ln(\frac{x}{y}) - (\ln(x) - \ln(y))\right) = \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + 0 = 0$

Alltså är $\ln(\frac{x}{y}) - (\ln(x) - \ln(y)) = C$ konstant, samma för alla x, sätt $x=y$

$C = \ln(\frac{y}{y}) - (\ln(y) - \ln(y)) = \ln(1) - 0 = 0$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\ln(x^r) - r\ln(x)\right) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} - r\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\cdot r - r\cdot\frac{1}{x} = 0$

$\ln(x^r) - r\ln(x) = C$, samma C för alla x, välj $x=1$

$C = \ln(1^r) - r\ln(1) = 0$

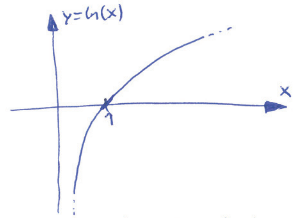
VSB.

ln är strängt växande eftersom $\frac{d}{dx}\ln(x) \overset{①}{=} \frac{1}{x} > 0$. Från (iv) följer att

$\ln(\underbrace{2^n}_{\to\infty}) = n \overbrace{\ln(2)}^{>\ln(1)=0} \to \infty$ då $n\to\infty$,

$\ln(\underbrace{2^{-n}}_{\to 0+}) = -n\ln(2) \to -\infty$ då $n\to\infty$.

Alltså: $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$, ② $D(\ln) = (0,\infty)$, ③ $V(\ln) = (-\infty,\infty)$



①,②,③ $\Rightarrow$ ln inverterbar, kalla inversen exp, dvs $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(y)$

Vi visade redan på första lektionen om logaritmen hur denna ekvivalens kunde användas för att skriva om räknelagar för exponentialfunktionen till motsvarande räknelagar för logaritmer:

(i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ $\quad e^{x+y} = e^x e^y$ (ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ $\quad e^{-x} = 1/e^x$

(iii) $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ (iv) $\exp(x)^r = \exp(rx)$

ln(x) har tangent med lutning $\frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow$ Inversa funktionen har icke lodrät tangent i varje p … $\Rightarrow$ exp deriverbar $\Rightarrow$ exp kont. 3

Låt $e = \exp(1)$. Då är $\exp(r) = \exp(1r) = \exp(1)^r = e^r$ för rationella r och allmänt

Definierad även för reella x

$$\exp(x) = \exp(\lim_{\substack{r\to x \\ r \text{ rationell}}} r) = \lim_{\substack{r\to x \\ r \text{ rationell}}} \exp(r) = \lim_{\substack{r\to x \\ r \text{ rationell}}} e^r = e^x$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Men i praktiken behöver man bara veta att e^x är definierad för reella x och med räknereglerna (i) - (iv) ovan. Det som gör basen e speciell är att e^x är sin egen derivata:

$$y = e^x \iff x = \ln(y) \qquad \text{Implicit derivering, } \tfrac{d}{dx}$$

$$1 = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{dy}{dx} = y = e^x$$

$$\boxed{= e^x, \quad \int e^x\,dx = e^x + C}$$

För $a > 0$ kan vi skriva $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \cdot \ln a} = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a \quad a^x \ln a = a^x \ln a$$

Även $y = \log_a(x) \iff x = a^y \overset{d/dx}{\Longrightarrow} 1 = a^y \ln a \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$

Samma knep funkar mer allmänt för att derivera funktioner av typ

$$h(x) = f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = \frac{d}{dx} e^{g(x)\ln(f(x))} = e^{g(x)\ln(f(x))} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Ex:

$$h(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln(x)}$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx} e^{x \ln(x)} = e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x) + 1)$$

Ger även att $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

Ex Vi har sett tidigare att

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{om } x > 0, \\ -1 & \text{om } x < 0, \\ \text{odefinierad} & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Alltså följer (även för $x < 0$) att

$$\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x},$$

så att

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{1}{x}.}$$

Denna används mer flitigt i M0048M nästa läsperiod.

Tentamensdatum: fredag 17 Maj 2013

1. (a) Bevisa med hjälp av matematisk induktion att $n$te-derivatan

$$\frac{d^n(xe^x)}{dx^n} = (n+x)e^x \qquad \text{för alla heltal } n \geq 1.$$

(2 p)

(b) Beräkna den konstanta termen i utvecklingen av $\left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{30}$. Svaret kan innehålla en binomialkoefficient som du inte behöver räkna ut värdet på. (3 p)

1 a) Skall visa påståendet

$$P_n: \frac{d^n(xe^x)}{dx^n} = (n+x)e^x, \quad n \geq 1$$

För $n=1$ har vi $\frac{d(xe^x)}{dx} = 1 \cdot e^x + xe^x = (1+x)e^x$

Alltså: P_1 sant! (1)

Antag nu att P_n är sant, $n \geq 1$. För P_{n+1} är då

$$VL = \frac{d^{n+1}(xe^x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^n(xe^x)}{dx^n} \overset{P_n}{=} \frac{d}{dx}(n+x)e^x =$$

$$= 1 \cdot e^x + (n+x)e^x = (n+1+x)e^x = HL$$

Alltså: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (2)

(1), (2) och induktionsaxiomet ger att P_n är sant för alla positiva heltal.

b) Binomialsatsen ger att

$$(2x^2 - \frac{1}{2x})^{30} = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} (2x^2)^k \left(-\frac{1}{2x}\right)^{30-k} = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} 2^k x^{2k} (2x)^{-30+k} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} 2^{k-30+k} x^{2k-30+k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} 2^{2k-30} x^{3k-30} (-1)^k$$

För konstanta termen gäller att $3k - 30 = 0$, dvs $k = 10$. Detta ger konstanten

$$\binom{30}{10} 2^{20-30} x^0 (-1)^0 = \binom{30}{10} 2^{-10} = \binom{30}{10}\frac{1}{1024}$$

SVAR: $\binom{30}{10}\frac{1}{1024}$

Extra räkneexempel om det skulle bli tid över

(Mer tid på Avsnitt 3.3 i M0047M, men det kunde behövas, så förmodigen fler extra räkneexempel här än vad som behövs)

L25

3.3.4 Förenkla $e^{(3\ln(9))/2}$.

$$e^{(3\ln(9))/2} = e^{\frac{3}{2}\ln(9)} = e^{\ln(9^{3/2})} = 9^{3/2} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 3^3 = \underline{\underline{27}}$$

3.3.6 Förenkla $e^{2\ln(\cos(x))} + (\ln(e^{\sin(x)}))^2$.

$$e^{2\ln(\cos(x))} + (\ln(e^{\sin(x)}))^2 = e^{\ln(\cos^2(x))} + (\sin(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = \underline{\underline{1}}$$

3.3.8 Förenkla $4\ln(\sqrt{x}) + 6\ln(x^{1/3})$.

$$4\ln(\underbrace{\sqrt{x}}_{=x^{1/2}}) + 6\ln(x^{\frac{1}{3}}) = 4\cdot\tfrac{1}{2}\ln(x) + 6\cdot\tfrac{1}{3}\ln(x) = (2+2)\ln(x) = \underline{\underline{4\ln(x)}}$$

3.3.11 Lös ekvationen $2^{x+1} = 3^x$.

$$2\cdot 2^x = 3^x$$

$$2 = \frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\ln(2) = \ln\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^x\right) = x\ln\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\ln(2)}{\ln(3/2)}}}$$

3.3.12 Lös ekvationen $3^x = 9^{1-x}$.

$$\ln(3^x) = \ln(9^{1-x})$$

$$x\ln(3) = (1-x)\ln(9)$$

$$x(\ln(3) + \ln(9)) = \ln(9)$$

$$x = \frac{\ln(9)}{\ln(3)+\ln(9)} = \frac{\ln(3^2)}{\ln(3)+\ln(3^2)} = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)+2\ln(3)}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$$

Kortare:

$$3^x = 9^{1-x}$$

$$3^x = 3^{2(1-x)}$$

$$x = 2(1-x)$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

3.3.14 Lös ekvationen $2^{x^2-3} = 4^x$.

$$2^{x^2-3} = 2^{2x}$$

$$x^2 - 3 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

SVAR: $x = -1$ eller $x = 3$

3.3.16 Bestäm definitionsmängden för $\ln(\underbrace{x^2-x-2}_{=0 \text{ om } x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1\pm 3}{2}})$.

$$0 < x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = f(x)$$

		-1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

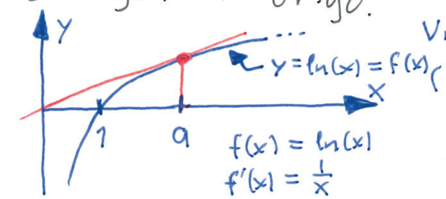
SVAR: $\ln(x^2-x-2)$ är definierad för $x < -1$ och för $x > 2$.

L26

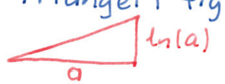
3.3.36 $\frac{d}{dx}\ln(|\sin(x)|) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \underline{\underline{\cot(x)}}$

3.3.26 $\frac{d}{dx} e^{(x^2)} = e^{(x^2)}\cdot 2x = \underline{\underline{2x\,e^{(x^2)}}}$

3.3.62 Bestäm ekvationen för den tangent till $y = \ln(x)$ som går genom origo.



Vi kallar tangeringspunkten $(a, \ln(a))$. Triangel i figuren:



$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Tangentens lutning $= k = \frac{\ln(a)}{a} = f'(a) = \frac{1}{a}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ln(a)}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(a) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a = e$$

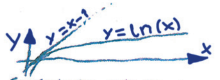
Tangentens ekvation blir då $y = kx = \frac{1}{e}x = \frac{x}{e}$.

(eller med standardformel för tangentens ekvation:
$y = f(e) + f'(e)\cdot(x-e) = \ln(e) + \frac{1}{e}(x-e) = 1 + \frac{x}{e} - 1 = \frac{x}{e}$)

SVAR: $y = \frac{x}{e}$

Lektion 27: Tillväxt och avtagande. Standardgränsvärden. (Adams avsnitt 3.4)

①



Sats 4: För $x>0$ så är $\ln(x) \le x-1$.

Bevis: Låt $g(x) = \ln(x) - x + 1$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \begin{cases} >0 & \text{för } 0<x<1 \\ <0 & \text{för } x>1 \end{cases} \Rightarrow g(x) \begin{cases} \text{strängt växande för } 0<x<1 \\ \text{strängt avtagande för } x>1 \end{cases} \Rightarrow g(x) \le g(1) = 0.$ VSB!

STANDARDGRÄNSVÄRDEN För $a>0$ gäller att

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$ (b) $\lim_{x\to 0+} x^a \ln(x) = 0$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ (d) $\lim_{x\to -\infty} |x|^a e^x = 0$

Vid konflikter

Potensfunktioner vinner över logaritmer!

Exponentialfunktioner vinner över potensfunktioner!

Bevis (a) Eftersom $\ln(x) = \frac{2}{a}\ln(x^{a/2})$ så kan vi för $x>1$ och $a>0$ skriva

$0 < \frac{\ln(x)}{x^a} = \frac{2}{a}\frac{\ln(x^{a/2})}{x^a} \overset{\text{Sats 4}}{\le} \frac{2}{a}\frac{x^{a/2}-1}{x^a} < \frac{2}{a}\frac{x^{a/2}}{x^a} = \frac{2}{ax^{a/2}}$, dvs

$0 < \frac{\ln(x)}{x^a} < \frac{2}{ax^{a/2}} \to 0$ då $x\to\infty$.

Instängningssatsen ger att även $\frac{\ln(x)}{x^a} \to 0$ då $x\to\infty$

(b) $x^a\ln(x) = \left[\begin{smallmatrix}\text{sätt } x=\frac{1}{t} \\ t\to\infty \text{ då } x\to 0+\end{smallmatrix}\right] = t^{-a}\ln(\tfrac{1}{t}) = -\frac{\ln(t)}{t^a} \to 0$ då $x\to 0+$ enligt (a).

(c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x} = \left[\begin{smallmatrix}\text{sätt } x=\ln(t) \Leftrightarrow t=e^x \\ t\to\infty \text{ då } x\to\infty\end{smallmatrix}\right] = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln(t))^a}{t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t^{1/a}}\right)^a = 0^a = 0$ enligt (a).

(d) $\lim_{x\to-\infty}|x|^a e^x = [\text{sätt } x=-t] = \lim_{t\to\infty}|-t|^a e^{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^a}{e^t} = 0$ enligt (c).

VSB

Ex: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)^7}{x^{1/4}} = \lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{\ln(x)}{x^{1/28}}}_{\to 0}\Big)^7 = 0$

3.4.2 $\lim_{x\to -\infty} \underbrace{x^{-3}}_{\to 0}\underbrace{e^x}_{\to 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\underbrace{x^3 e^{-x}}_{\to 0+}} = \infty$

Ingen konflikt, så här behövs inget standardgränsvärde.

3.4.4 $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2e^{-x}}{x+3e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(1-2/(xe^x))}{\cancel{x}(1+3/(xe^x))} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Ex $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1$

Ex $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})} = \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\frac{\ln(n)}{n}}^{\to 0}} = e^0 = 1.$

Ex $\lim_{x\to\infty} x^2(\tfrac{1}{2})^x = \lim_{x\to\infty} x^2 (e^{\ln(\frac{1}{2})})^x = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{\overbrace{\ln(\frac{1}{2})}^{<0}x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(\ln(\frac{1}{2}))^2}\cdot\overbrace{(\ln(\tfrac{1}{2})x)^2 e^{\ln(\frac{1}{2})x}}^{\to 0} \overset{(d)}{=} 0$

eller...

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{\ln(2)x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(\ln(2))^2}\cdot\frac{(\ln(2)\cdot x)^2}{e^{\ln(2)x}} \overset{(c)}{=} 0$

$\ln(2)x \to\infty$

Tentauppgift 2012 (2p)

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)-\sin(2x)}{5x+x^2\ln(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{3x\cdot\frac{\sin(3x)}{3x} - 2x\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}}{5x + x^2\ln(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\cancel{x}(3\cdot\overbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}^{\to 1} - 2\overbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}^{\to 1})}{\cancel{x}(5 + x\ln(x))} = \frac{1}{5}$

Tentauppgift 2012 (2p)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)+5x^2\ln(x^2)}{\sin(7x)+9x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3x + 5x^2\ln(x^2)}{7x\cdot\frac{\sin(7x)}{7x} + 9x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\cancel{x}(\overbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}^{\to 1}\cdot 3 + 10\cdot\overbrace{x^2\ln(x)}^{\to 0})}{\cancel{x}(7\cdot\underbrace{\frac{\sin(7x)}{7x}}_{\to 1} + 9)} = \frac{3}{16}$

②

Tentauppgift 2011 (1p)

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}+\sin(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{x^{10}}{e^x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin(x)}{e^x}}_{\to 0}\Big) = 0$

Liten del av annan tentauppgift 2011

$f(x) = (x^2+2x-1)e^{2x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big(1 + \overbrace{\tfrac{2}{x} - \tfrac{1}{x^2}}^{\to 0}\Big)\underbrace{x^2 e^{2x}}_{=\frac{1}{4}(2x)^2e^{2x}\to 0} = 1\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{(x^2+2x-1)}_{\to\infty}\underbrace{e^{2x}}_{\to\infty} = \infty$

Tentauppgift 2010 (2p)

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)+\ln(3x)}{\ln(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x\cdot 3x)}{\ln(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3x^2)}{\ln(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3)+\ln(x^2)}{\ln(x^2)} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3)}{\underbrace{\ln(x^2)}_{\to\infty}} + 1 = 0+1 = 1$

Exponentiell tillväxt/avtagande i tillämpningar

- Radioaktivt material har en sönderfallshastighet som är proportionell mot massan. Har man $m(t)$ kg så är sönderfallshastigheten $m'(t)$ (kg/s) proportionell mot massan: $\boxed{m'(t) = k\cdot m(t)}$
- Celldelning. Om varje cell i en odling (?) delar sig ungefär lika snabbt så är tillväxten proportionell mot hur många celler det finns. Om $y(t)$ är antal celler vid tidpunkt t så är $\boxed{y'(t) = k\,y(t)}$ för någon konstant k.
- Värmestrålning: För ett objekt med temperatur $y(t)$ är temperaturändringen proportionell mot temperaturskillnaden relativt omgivningen.

$y'(t) = k\cdot(y(t) - T)$ Omgivningens temperatur, sätt $u(t) = y(t)-T$

$u'(t) = y'(t)$, dvs

$\boxed{u'(t) = k\cdot u(t)}$

$\boxed{\text{Problemet } \begin{cases} y'(t) = k\cdot y(t) \\ y(0) = y_0\end{cases} \text{ har lösning } y(t) = y_0\cdot e^{kt}}$ Växande om $k>0$. Avtagande om $k<0$.

(Lätt att derivera och kontrollera att $y(t) = y_0\cdot e^{kt}$ är en lösning, men för att bevisa att varje lösning ser ut så så behöver vi gå andra vägen.)

Bevis

Låt $y(t)$ vara en lösning till $\begin{cases} y'(t) = k\cdot y(t) \\ y(0) = y_0\end{cases}$. Då är

$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{e^{kt}}\right) = \frac{y'(t)\cdot e^{kt} - y(t)\cdot e^{kt}\cdot k}{(e^{kt})^2} = \frac{k\cdot y(t)e^{kt} - y(t)e^{kt}\cdot k}{(e^{kt})^2} = 0,$

dvs $\frac{y(t)}{e^{kt}} = C$ konstant.

$y(t) = C e^{kt}$ ger $y_0 = y(0) = C\cdot e^0 = C$, så att $y(t) = y_0 e^{kt}$

V.S.V.

Ex 2 Ett radioaktivt material har halveringstid 1200 år, dvs om det finns m_0 kg vid tidpunkten $t=0$ så finns $\frac{m_0}{2}$ kg kvar efter 1200 år:

(3)

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

$$m(1200) = \frac{m_0}{2}$$

$$m_0 e^{k1200} = \frac{m_0}{2}$$

$$e^{k\cdot 1200} = \frac{1}{2}$$

$$k\cdot 1200 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$k = -\frac{\ln(2)}{1200}$$

$$\boxed{m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln(2)}{1200}t}}$$

Uppgift 3.4.26

Ett objekt placeras i frys med temperatur $-5°C$. Objektet svalnar från 45° till 20° på 40 minuter. Hur lång tid tar det att svalna från 20° till 0°?

Temp:

$y'(t) = k(y(t) - (-5))$, sätt $u(t) = y(t) + 5$
$u'(t) = y'(t)$

$$u'(t) = k\cdot u(t)$$

$u(t) = u_0 e^{kt}$, $u_0 = \overset{y_0}{45} + 5 = 50$

Givet att $u(40) = y(40)+5 = 20+5 = 25$

$$50e^{k\cdot 40} = 25$$

$$e^{k40} = \frac{1}{2}$$

$$k\cdot 40 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$k = -\frac{\ln(2)}{40}$$

$$u(t) = 50e^{-\frac{\ln(2)}{40}t}$$

När temp Når 0° vid tidpunkt T

$$y(t) = u(t) - 5 = 50e^{-\frac{\ln(2)}{40}t} - 5$$

$$50e^{-\frac{\ln(2)}{40}T} - 5 = 0$$

$$\ln\left(e^{-\frac{\ln(2)}{40}T}\right) = \ln\left(\frac{5}{50}\right)$$

$$-\frac{\ln(2)}{40}T = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10)$$

$T = 40\frac{\ln(10)}{\ln(2)}$ från 45° till 0°.

SVAR: Objektet svalnar från 20° till 0° på $40\frac{\ln(10)}{\ln(2)} - 40 = 40\left(\frac{\ln(10)}{\ln(2)} - 1\right)$ minuter.

(4) **Bankränta**

Antag att ni sätter in $K = 10000$ kr på ett bankkonto med $r = 3\%$ ränta. På varje år ökar då de pengarna med en faktor $1.03 = 1 + \frac{r}{100}$. Antag att ni förhandlar till er att dela in året i n lika stora delar och få $\frac{r}{n}\%$ ränta för varje sådan period. Totala tillväxten på ett år blir då

$$K\cdot\underbrace{\left(1+\frac{r}{100n}\right)\cdot\left(1+\frac{r}{100n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{r}{100n}\right)}_{n \text{ st.}} = K\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$$

Vad blir då tillväxten på ett år om $n\to\infty$? dvs vad är $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r/100}{n}\right)^n$?

Bra eller dålig deal?

$e^{0.03} \approx 1,0305$ så mycket marginell vinst från byte till kontinuerlig ränta.

Theorem 6

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

$\Rightarrow$ T ex fås för $r = 10\%$ ränta att tillväxtfaktorn på ett år blir $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0,10}{n}\right)^n = e^{0,10} \approx 1,105$. Alltså en bra deal.

Bevis

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \left[\begin{matrix}\text{sätt } h = \frac{x}{n} \\ h\to 0 \text{ då } n\to\infty\end{matrix}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h) - \overset{=0}{\ln(1)}}{h}$$

$$= x\cdot\frac{d}{dt}\ln(t)\Big|_{t=1} = x\cdot\frac{1}{t}\Big|_{t=1} = x \quad (*)$$

Eftersom ln är deriverbar och alltså kontinuerlig så gäller allmänt att

$$\lim_{x\to x_0}\ln(x) = \ln(x_0) = \ln\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

Eller för $(*)$ ovan:

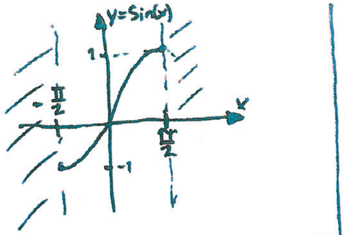
$$x = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$$

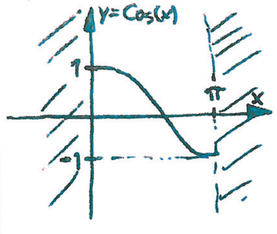
Alltså är $e^x = e^{\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

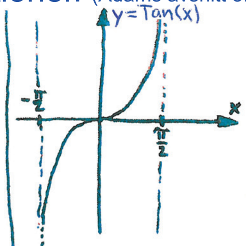
VSB!

Lektion 28: Arcusfunktionerna. Hyperboliska funktioner. (Adams avsnitt 3.5-3.6)

①







OBS! $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$ men $\sin^{-1}(x) \neq \frac{1}{\sin(x)}$ och samma för $\cos^{-1}$ och $\tan^{-1}$.

$\text{Sin}(x) = \sin(x), \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ | $\text{Cos}(x) = \cos(x)$ om $0 \le x \le \pi$ | $\text{Tan}(x) = \tan(x)$ om $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Positiv/negativ derivata $\Rightarrow$ Strängt växande/avtagande i hela definitionsmängden

$y = \text{Sin}(x), -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
$\Updownarrow$
$x = \sin^{-1}(y) = \arcsin(y), -1 \le y \le 1$

$\sin^{-1}(\text{Sin}(x)) = x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
$\sin(\sin^{-1}(y)) = y, -1 \le y \le 1$

$y = \text{Cos}(x), 0 \le x \le \pi$
$\Updownarrow$
$x = \cos^{-1}(y) = \arccos(y), -1 \le y \le 1$

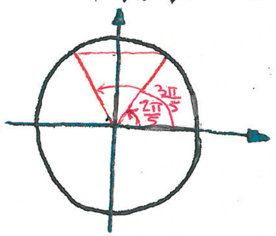
$\cos^{-1}(\text{Cos}(x)) = x, 0 \le x \le \pi$
$\cos(\cos^{-1}(y)) = y \quad -1 \le y \le 1$

$y = \text{Tan}(x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\Updownarrow$
$x = \tan^{-1}(y) = \arctan(y), -\infty < y < \infty$

$\tan^{-1}(\text{Tan}(x)) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\tan(\tan^{-1}(y)) = y, -\infty \le y \le \infty$

Ex: $\sin^{-1}(\sin(\pi/8)) = \frac{\pi}{8}$

Ex: $\sin^{-1}\Big(\underbrace{\sin\big(\tfrac{3\pi}{5}\big)}_{\text{Ej i } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]!}\Big) = \sin^{-1}\Big(\sin\big(\pi - \tfrac{3\pi}{5}\big)\Big) = \sin^{-1}\big(\sin\big(\tfrac{2\pi}{5}\big)\big) = \frac{2\pi}{5}$



Ex: $\underbrace{\cos(\sin^{-1}(0{,}8))}_{\geq 0} = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1}(0{,}8))} = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ $\quad \sin^{-1}(0{,}8) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

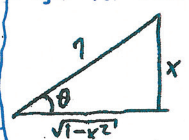
Ex: Förenkla $\tan(\sin^{-1}(x)), \quad -1 < x < 1$

$\theta = \sin^{-1}(x) \iff x = \sin(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\tan(\sin^{-1}(0)) = \tan(0) = 0$ (1)

$\boxed{\tan(\sin^{-1}(x)) = \tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$ då $0 < x < 1$ (2)

Figur för $0 < x < 1$



$\tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Man brukar ofta nöja sig med att visa med sådan figur även om den egentligen bara gäller för specialfallet $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dvs $0 < x < 1$.

Alternativt kan man visa algebraiskt att $\tan(\sin^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ även för negativa x:

$x = \sin(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\Downarrow$
$\cos(\theta) > 0$
$\Downarrow$
$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = \sqrt{1 - x^2}$

Alltså är $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

②

Derivator av $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$

$y = \sin^{-1}(x) \iff x = \sin(y), \quad \underbrace{-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}}, \quad -1 \le x \le 1$

$1 = \cos(y) \frac{dy}{dx}, \quad \cos(y) \geq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

För $0 \le y \le \pi$ och $-1 \le x \le 1$:

$y = \cos^{-1}(x) \iff x = \cos(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \iff \frac{\pi}{2} - y = \sin^{-1}(x)$

$$\boxed{\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Uppgift 3.5.21

$y = \cos^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right)$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-b}{a}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) = -\frac{1}{\underbrace{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x-b}{a}\right)^2}} = -\frac{1}{\text{sgn}(a)\sqrt{a^2 - (x-b)^2}}$$

$a = \text{sgn}(a) \cdot |a| = \text{sgn}(a) \cdot \sqrt{a^2}$

$y = \tan^{-1}(x) \iff x = \tan(y)$

$$1 = \frac{1}{\cos^2(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(y) + \cos^2 y}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + \underbrace{\tan^2(y)}_{=x^2}) \frac{dy}{dx}$$

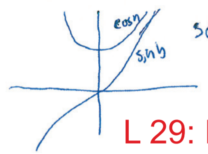
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Ex: $\frac{d}{dx} \tan^{-1}(3x^2) = \frac{1}{1 + (3x^2)^2} \cdot 6x = \frac{6x}{1 + 9x^4}$

Lägg till t ex gamla tentauppgifter?

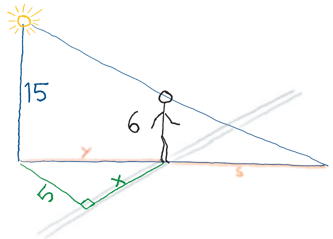
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



se sid 198-199 i boken

L 29: Reserv/repetition

4.1.**20.** A woman 6 ft tall is walking at 2 ft/s along a straight path on level ground. There is a lamppost 5 ft to the side of the path. A light 15 ft high on the lamppost casts the woman's shadow on the ground. How fast is the length of her shadow changing when the woman is 12 feet from the point on the path closest to the lamppost?



Givet: $y = y(t)$, $x = x(t)$, $s = s(t)$

$x'(t) = 2$ ft/s

Vid någon tidpunkt t_0 är $x(t_0) = 12$ fot.

Sökt: $s'(t_0)$

Likformiga trianglar ger att $60\cdot\frac{s}{6} = \frac{s+y}{15}\cdot 60$ (1)

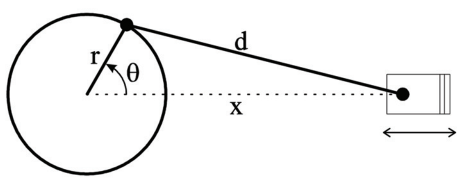
$$10s = 4s + 4y$$
$$6s = 4y$$
$$y = \frac{3s}{\cancel{2}}$$

Pytagoras sats:

$$y^2 = 5^2 + x^2$$
$$\Downarrow (1)$$
$$\frac{9s^2}{4} = 25 + x^2 \implies \boxed{\begin{aligned} s^2(t_0) &= \frac{4}{9}(25 + x(t_0)^2) \\ s(t_0) &= \frac{2}{3}\sqrt{25+12^2} = \frac{2}{3}\sqrt{25+144} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{169} = \frac{2}{3}\cdot 13 \end{aligned}}$$
$$\Downarrow \frac{d}{dt}$$
$$\frac{9\cdot\cancel{2}ss'}{4} = \cancel{2}xx'$$
$$s'(t) = \frac{4x(t)x'(t)}{9s(t)}$$
$$s'(t_0) = \frac{4x(t_0)x'(t_0)}{9s(t_0)} = \frac{4\cdot 12\cdot\cancel{2}}{{}^{3}\cancel{9}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot 13} = \underline{\underline{\frac{48}{39}\text{ ft/s}}}$$

Tentamensdatum: **2020-12-21**

6. Chefsingenjör Ronald har konstruerat en ny kolvmotor, se nedanstående figur.



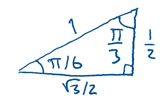
Antag att vevaxeln roterar moturs med en hastighet av 6500 rpm (6500 varv per minut). På vevaxeln sitter ett svänghjul med radie $r = 3$ cm i vilket en vevstake med längd $d = 7$ cm är fäst. I andra änden av vevstaken är en rörlig kolv fäst. När vinkeln θ ändras kommer då kolven att utföra horisontell rörelse x.

(a) Vad är avståndet x vid tillfället när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$? (2p)

(b) Hjälp Ronald att beräkna kolvens hastighet när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$. (3p)

Cosinussatsen: $d^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos(\theta)$ (1)

(a) Med siffervärden givna i uppgiften ger (1)



$$7^2 = 3^2 + x^2 - 6x\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}}$$
$$0 = x^2 - 3x - 40$$
$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40\cdot 4}{4}} = \frac{3\pm\sqrt{169}}{2} = \frac{3\pm 13}{2}$$
$$\cancel{x = -\frac{10}{2} = -5} \quad \text{eller} \quad x = \frac{16}{2} = 8$$

Falsk lösning, ty visar i figuren att $x \geq d - r = 7-3 = 4$

SVAR: $\underline{\underline{8\text{cm}}}$

(b) I (1) beror x och θ av tiden och derivering med avseende på t ger

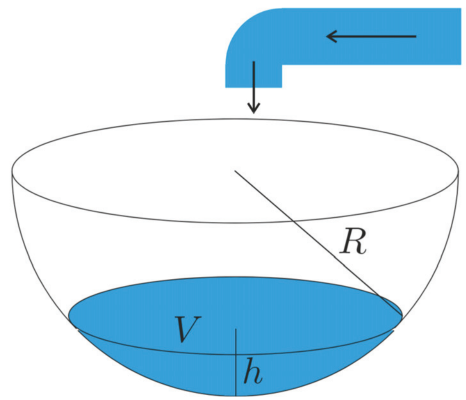
$$0 = 2xx' - 2r(x'\cdot\cos(\theta) - x\sin(\theta)\theta')$$

med $x = 8$, $r = 3$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ och $\theta' = 6500\,\frac{\text{varv}}{\text{min}}\cdot\frac{1}{60}\,\frac{\text{min}}{\text{s}}\cdot 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{varv}} = \frac{650}{3}\pi$ rad/s

$$0 = 2\cdot 8x' - \cancel{2}\cdot 3\Big(x'\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)}_{=1/\cancel{2}} - 8\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)}_{=\sqrt{3}/\cancel{2}}\cdot\frac{650}{3}\pi\Big)$$
$$(16-3)x' = -8\cdot 650\sqrt{3}\pi$$
$$x' = -\frac{8\cdot 650\sqrt{3}\pi}{13_{=50}} = \underline{\underline{400\sqrt{3}\pi\ \text{cm/s}}}$$

Tentamensdatum: **2021-12-21**

6. En tank har halvsfärisk form med radie $R = 2$ m. Tanken fylls på uppifrån med ett inflöde av vatten, se nedanstående figur.



När vattendjupet är h m så ges vattenvolymen V av

$$V = \frac{\pi h^2(3R-h)}{3}\ \text{m}^3. \implies V' = \frac{\pi}{3}\left(2hh'(3R-h) + h^2(-h')\right)$$

Med vilken hastighet ändras djupet h vid den tidpunkt då djupet är $\frac{1}{2}$ m och vatten tillförs med en hastighet av 11 liter per sekund? $\implies V' = 11$ l/s $= \frac{11}{1000}$ m³/s (5p)

$$V' = \frac{\pi}{3}(6Rh - 2h^2 - h^2)h' = \frac{\pi}{3}(6Rh - 3h^2)h' = \pi(2Rh - h^2)h'$$
$$h' = \frac{V'}{\pi(2Rh - h^2)} = \frac{11}{1000\pi(2\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - \frac{1}{4})} = \frac{11}{1000\pi\cdot\frac{7}{4}} = \underline{\underline{\frac{44}{7000\pi}\ \text{m/s}}}$$

Lektion 30-31: Kopplade derivator och extremvärden (Adams avsnitt 4.1, 4.4) 1

Kopplade derivator visas lättast med räkneexempel

Uppg. 4.1.8

Boll av is. Volym $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$

$\downarrow \frac{d}{dt}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cancel{3} r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

Vid en given tidpunkt är $r = 3$ cm, $\frac{dr}{dt} = -0{,}25$ cm/h Sökt: $\frac{dV}{dt}$

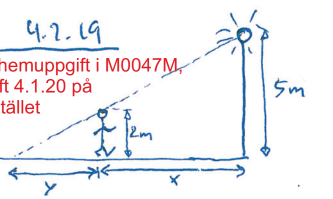
$$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 3^2 \cdot (-0{,}25) = -9\pi \approx 28{,}3 \text{ cm}^3/\text{h}$$

Huvudsteg

1) Sätt namn på storheter (längder/volymer) rita figur (vid behov)
2) Härled formel för hur ingående storheter beror av varandra. (Sätt inte in siffror redan här!)
3) Implicit derivering ger hur storheternas derivator beror av varandra.
4) Nu men inte tidigare: Sätt in siffror för kända storheter/derivator vid en given tidpunkt.

Uppg 4.2.19

Utdelad hemuppgift i M0047M, så uppgift 4.1.20 på lektion istället



Givet: Vid en given tidpunkt är $\frac{dx}{dt} = -0{,}5$ m/s, $x = 3$ m

Sökt: Hur snabbt avtar $x+y$ vid denna tidpunkt? Dvs räkna ut $\left|\frac{d}{dt}(x+y)\right|$ vid denna tidpunkt.

Likformiga trianglar ger: $\frac{2}{y} = \frac{5}{x+y}$

Förenkla först så blir det lite mer lättderiverat.

$2(x+y) = 5y$ derivera, $\frac{d}{dt}$

$2x = 3y$

$2x' = 3y'$

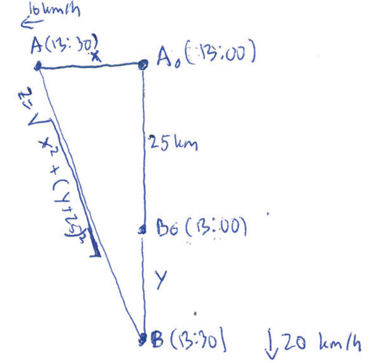
$$y' = \frac{2}{3}x' = \frac{2}{3}\cdot(-0{,}5) = -\frac{1}{3} \text{ m/s}$$

$$x' + y' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6} \text{ m/s}$$

SVAR: $\frac{5}{6}$ m/s

Oberoende av värdet på x!

2) 4.1.22



13:30 är $x = \frac{16}{2} = 8$ km, $x' = 16$ km/h

$y = \frac{20}{2} = 10$ km, $y' = 20$ km/h

$z = \sqrt{8^2 + 35^2} = \sqrt{1289}$

Sökt: Värdet på z' 13:30.

$$z^2 = x^2 + (y+25)^2$$

$$\cancel{2}zz' = \cancel{2}xx' + \cancel{2}(y+25)\cdot y'$$

$$z' = \frac{xx' + (y+25)y'}{z} \overset{13:30}{=} \frac{8\cdot 16 + 35\cdot 20}{\sqrt{1289}} = \frac{828}{\sqrt{1289}} \approx 23{,}06 \text{ km/h}$$

SVAR: ca 23,06 km/h.

Lokala/globala extremvärden = Lokala/globala max- eller minvärden

Vi såg i sats 14 sid 140 att

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ definierad på } (a,b) \\ f(x) \le f(c) \\ f \text{ deriverbar i } c \end{array}\right. \Rightarrow f'(c) = 0$$

och c kallas kritisk punkt för f om $f'(c) = 0$.

F har (globalt) maximum i x_0 om $f(x) \le f(x_0)$ för alla x i $D(f)$ (Def.mängd)

F har lokalt maximum i x_0 om, $f(x) \le (x_0)$ för alla x i $D(f)$ sådana att $|x-f|<h$ (för något $h>0$)

Dito för globala/lokala minimum.

Sats 6 Om f är definierad på ett intervall I och har ett lokalt extremvärde (max/min) i en punkt x_0 i I, då är antingen 1) $f'(x_0) = 0$, (kritisk punkt) 2) f ej deriverbar i x_0 (singulär punkt) 3) eller x_0 är en av ändpunkterna för I. (Ändpunkt)

Bevis: Att 2) och 3) måste vara med i listan inses enklast genom att välja något exempel där extremvärden i såna punkter:

- $f_1(x) = -|x|$: Maximum i $x=0$, f ej deriverbar där, dvs singulär pkt.
- $f_2(x) = \sqrt{x}$: $D(f) = [1, \infty)$. f_2 har minimum i ändpunkten $x=1$

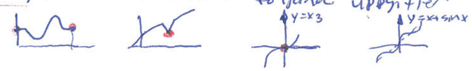
③

Slutligen, om f har extremvärde (max/min) i x_0 men x_0 varken är singulär eller ändpunkt, då kan vi införa $f_h(x) = f(x)$ för x i $D(f)$ med $|x - x_0| < h$; och välja h så att x_0 är globalt max/min för f_h och $f_h'(x_0) = f'(x_0)$ finns, så att sats 14, sid 140 ger att $f_h'(x_0) = 0$, dvs $f'(x_0) = 0$.

VSB!

Alla extremvärden måste alltså en av dessa tre typer, men punkter av den typen måste inte vara extremvärde, som vi skall se i följande uppgifter

Ex



Uppg. 4.4.9

$f(x) = x^5 + x^3 + 2x$ på $(a, b]$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow f$ strängt växande

Inget minimum, Maximum $f(b) = b^5 + b^3 + 2b$

Uppg. 4.4.12

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ på $[2, 3]$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot 1 > 0$ för $x \neq 1$ så ingen kritisk punkt

Singulär punkt: $x = 1$: $\left(\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 1+} f(x) = \infty\right)$ ej i $[2, 3]$! $D(f)$

Ändpunkter: $f(2) = 1$ och $f(3) = \frac{1}{2}$

SVAR: Globalt max $f(2) = 1$, globalt min $f(3) = \frac{1}{2}$

Uppg 4.4.24

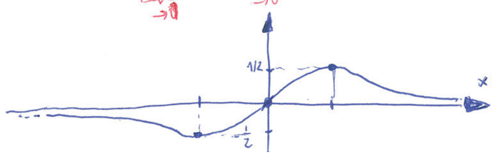
$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ hitta extremvärden och skissa upp funktionsgraf.

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ inga singulära punkter $f'(x) = 0$ för $x = \pm 1$

		−1		1	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

$f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 0$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(1 + \underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0})} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^{-2}}}_{\to 1} \to 0$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$

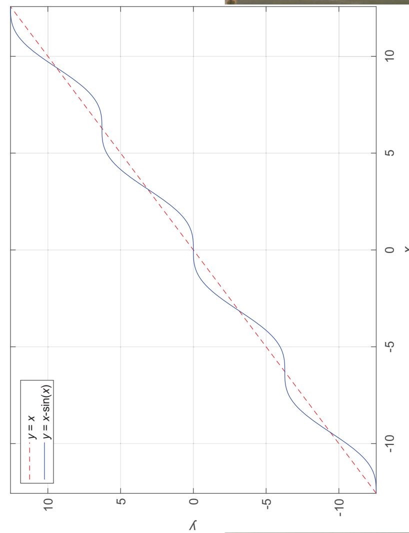


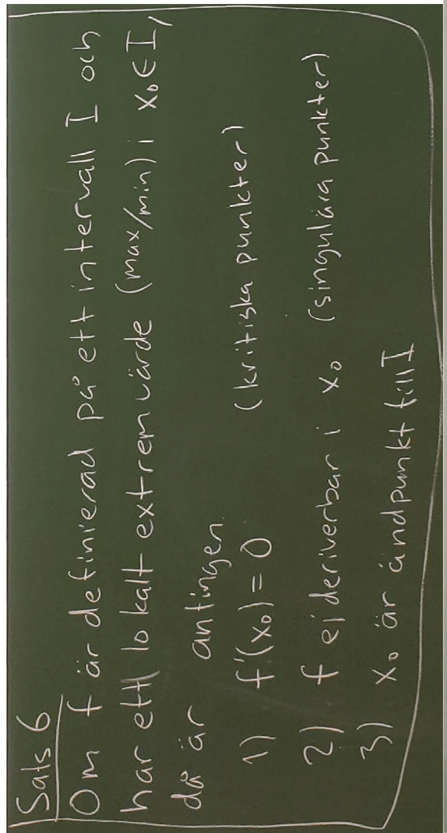
Expanderat från en till två lektioner i M0047M, så det bör finnas utrymme för fler räkneexempel här.

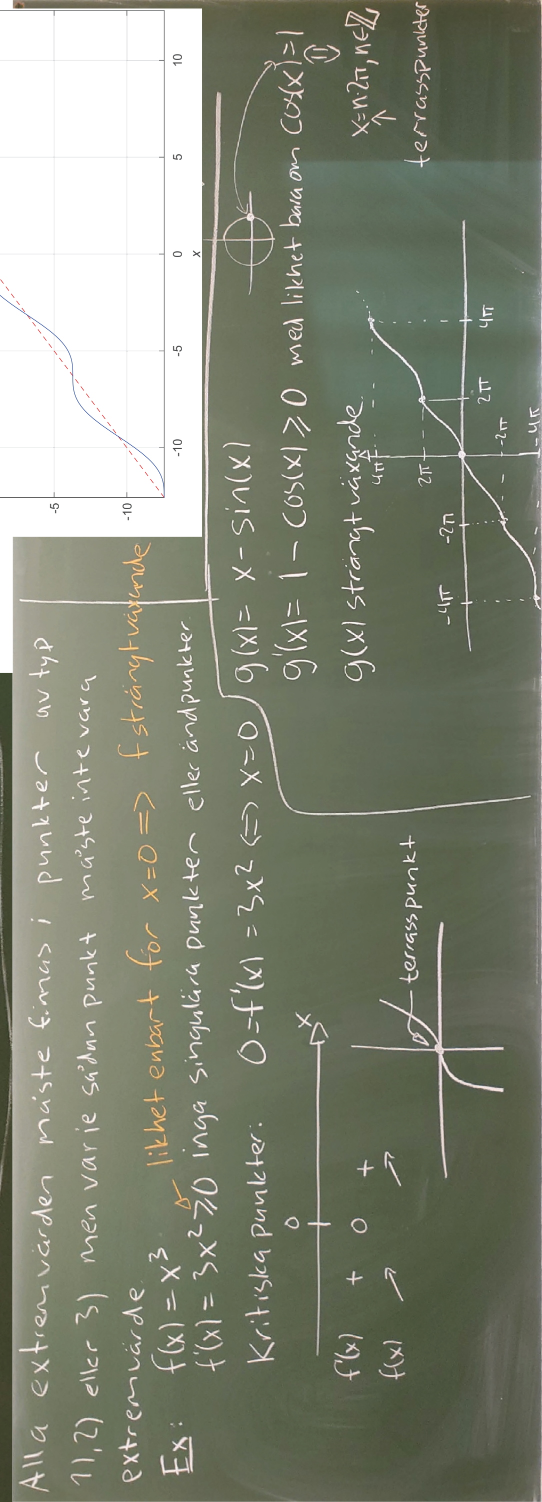
Ge även något exempel på andraderivatatest för extremvärden.

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x) & \text{för } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{för } x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \end{cases}$$

har singulära punkter och ändpunkter $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ som ej är extremvärden. Terrasspunkterna i exemplen är kritiska punkter som ej är extremvärden.







Tentamensdatum: **2021-12-21**

5. Betrakta funktionen

$$y = x^{1/x}, \quad x > 0.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. **Ledning:** *skriv först om funktionen på lämpligt sätt.* (3p)

(b) Ange funktionens värdemängd. Motivera! (1p)

(c) Avgör vilket av talen $\sqrt[3]{3}$ och $\sqrt[4]{4}$ som är störst. Motivera! (1p)

(a) $f(x) = x^{1/x} = e^{\ln(x^{1/x})} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ definierad för $x>0$, så inga lodräta asymptoter.

$f'(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \boxed{x^{1/x}\,\frac{1-\ln(x)}{x^2}}$ >0 då $x>0$

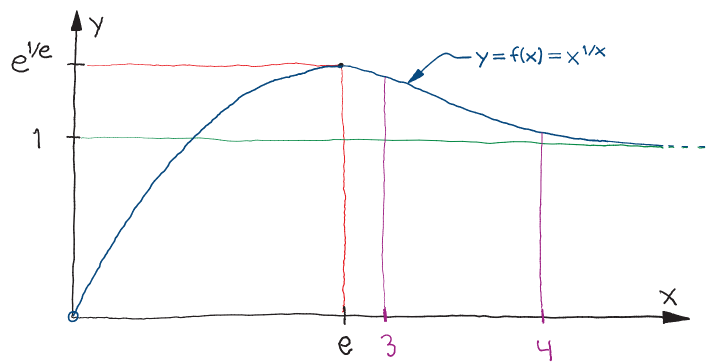
	0		e		x
$1-\ln(x)$	Ej def	+	0	−	
$f'(x)$	Ej def	+	0	−	
$f(x)$	Ej def	↗	$e^{1/e}$ lokalt max	↘	

Eftersom $g(x)=e^x$ är en kontinuerlig funktion så är

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\overbrace{\ln(x)}^{\to\infty}} = e^0 = 1,$ Tumregel: Potensfunktion vinner över logaritm

så vi har en vågrät asymptot $y=1$ när $x\to\infty$ och

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\overbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}\ln(x)}^{\to-\infty}} = 0$ $\to -\infty$ (Tumregel: potensfunktion vinner över logaritm.)



(b) Från grafen ovan framgår att värdemängden är $(0, e^{1/e}]$.

(c) Eftersom $f(x)$ är strängt avtagande då $x>e$ och $e<3<4$ så följer (som illustrerat i grafen ovan) att

$$\underline{\underline{\sqrt[3]{3} = f(3) < f(4) < \sqrt[4]{4}}}.$$

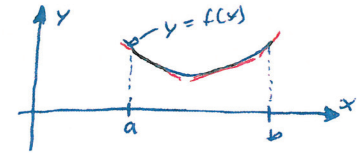
Lektion 32: Konvexitet, asymptoter, grafritning.

(Adams avsnitt 4.5-4.6)

Konvex/konkav, inflektionspunkt

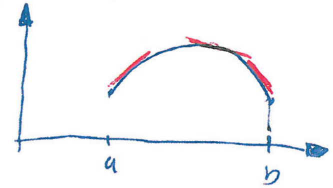
Om $f''(x)>0$ i ett intervall så gäller att f' är växande i intervallet, och funktionens graf kallas konvex (concave up) i intervallet.

Riemannsumma: Derivata...



Omvänt:

$f''(x)<0 \Rightarrow f'$ avtagande, tangenter över kurvan och denna kallas konkav i intervallet



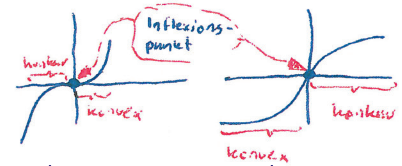
En punkt $(x, f(x))$ som är sådan att

1) $f'(x)$ finns

2) f'' växlar tecken i x (dvs från ett tecken omedelbart till vänster om x till motsatt tecken omedelbart till höger om x)

kallas inflexionspunkt.

Ex:



Två olika stavningar på svenska:
inflection point *sub.* inflektionspunkt, inflexionspunkt; punkt där en kurva byter krökningsriktning.

Uppg. 4.5.10

$f(x) = \frac{x}{x^2+3} =$

$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+3) - x\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$ (inga singulära punkter)

$f''(x) = \frac{-2x(x^2+3)^2 - (3-x^2)2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{(x^2+3)(-2x(x^2+3) - 4x(3-x^2))}{(x^2+3)^4}$

$= \frac{(x^2+3)(-2x^3-6x-12x+4x^3)}{(x^2+3)^4} = \frac{\cancel{(x^2+3)}x(2x^2-18)}{(x^2+3)^{\cancel{4}3}} = \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}$

Inflexionspunkter:

$f''(x)=0$ för $x=0$ och för $x=\pm 3$

		−3		0		3		x
$f''(x)$	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	⌢	infl.	⌣	infl	⌢	infl.	⌣	

Svar: Konkav på $(-\infty,-3)$ och $(0,3)$

Konvex på $(-3,0)$ och $(3,\infty)$

Inflexionspunkter: $-3, 0, 3$

Ge även något exempel på andraderivatatest för extremvärden.

Asymptoter

- f har en vertikal asymptot vid $x=a$ om

  antingen $\lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$ eller $\lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty$ eller båda

- f har en horisontell asymptot $y=L$ om

  antingen $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ eller $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ eller båda

- En rät linje $y=ax+b$ är en sned asymptot till f om

  antingen $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ eller $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$.

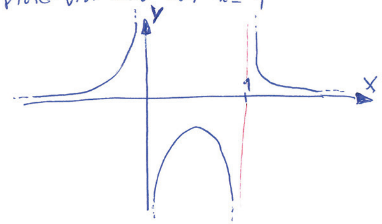
Exempel:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}$$ lodräta asymptoter vid $x=0$ och $x=1$

Lodräta asymptoter

$\lim_{x\to0-} f(x)=\infty$ $\quad\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to1-} f(x)=-\infty$ $\quad\lim_{x\to1+} f(x)=\infty$

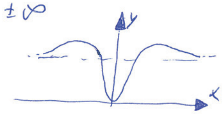


Vågrät asymptot: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

Exempel

$$g(x)=\frac{x^4+x^2}{x^4+1}=\frac{x^4(1+\frac{1}{x^2})}{x^4(1+\frac{1}{x^4})}\to1 \text{ då } x\to\pm\infty$$

Horisontell asymptot $y=1$. (Figur 4.36:



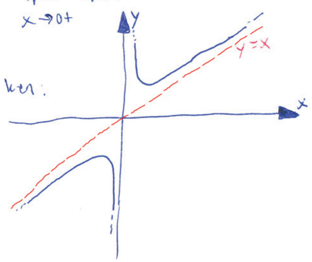
Exempel

$$h(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(h(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$ så $y=x$ är en sned asymptot då $x\to\pm\infty$

Lodrät asymptot: $\lim_{x\to0-} h(x)=-\infty$, $\quad\lim_{x\to0+} h(x)=\infty$

Figur 4.38 a i boken:



Rationella funktioner $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ (grad m, grad n) utan gemensam faktor

(a) För varje x sådant att $Q_n(x)=0$ har f en lodrät asymptot.

(b) Om $n>m$ så har $f(x)$ en tvåsidig horisontell asymptot $y=0$.

(c) Om $m=n$ så har $f(x)$ en horisontell asymptot $y=L\neq0$.

(d) Om $m=n+1$ så finns en sned asymptot

Polynomdivision ger

$$f(x)=ax+b+\frac{R(x)}{Q_n(x)}$$ grad<n

$\to0$ då $x\to\pm\infty$

(e) Ingen horisontell (eller sned) asymptot om $m>n+1$.

Alla utom (d) fås från standardomskrivningen

$$f(x)=\frac{a_mx^m+\dots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\dots+b_1x+b_0}=\frac{x^m\left(a_m+a_{m-1}\frac{1}{x}+\dots+a_1\frac{1}{x^{m-1}}+a_0\frac{1}{x^m}\right)}{x^n\left(b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+\dots+b_1\frac{1}{x^{n-1}}+b_0\frac{1}{x^n}\right)}$$

x^{m-n} $\quad\to\frac{a_m}{b_n}$

Uppg 4.6.16

På lektionen drog jag lite utförligare ungefär samma uppgift på följande sidor, fast mer kortfattat teckenstudium nedan.

$$f(x)=y=\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x^3-x+x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}$$, sned asymptot $y=x$ då $x\to\pm\infty$

Lodrät asymptot för $x=\pm1$

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$, kritiska punkter: $x=0$ och $x=\pm\sqrt3$

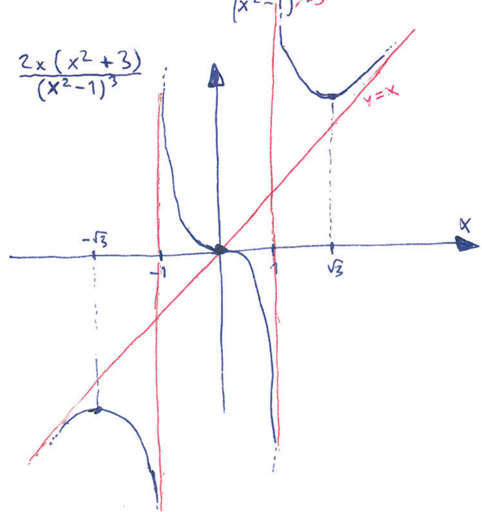
$$y''=\frac{\cancel{(4x^3-6x)}\,2x(2x^2-3)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x\cancel{(x^2-1)}\left((2x^2-3)(x^2-1)-2(x^4-3x^2)\right)}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{2x(\cancel{2x^4}-3x^2-2x^2+3\cancel{-2x^4}+6x^2)}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

x		$-\sqrt3$		-1		0		1		$\sqrt3$	
y'	+	0	−	∄	−	0	−	∄	−	0	+
y''	−	−	−	∄	+	0	−	∄	+	+	+
y	∩	∩	∩	lodr. asymp.	∪	0	∩	lodr. asympt.	∪	∪	∪

inflexionspunkt $x=0, y=0$

$$f(\sqrt3)=\frac{\sqrt3^3}{\sqrt3^2-1}=\frac{3\sqrt3}{2}\approx2{,}6>1{,}73\approx\sqrt3$$



Sneda asymptoter (Mer i PDF-fieln ”Om asymptotberäkningar” i Canvasrummet.)

Antag att $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(kx+m))=0$, dvs f har sned asymptot $y=kx+m$ när $x\to\infty$

Då är

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(kx+m)+kx+m}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\Big(\underbrace{(f(x)-(kx+m))}_{\to 0}+m\Big)+k\right)=0\cdot(0+m)+k=k$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{f(x)-(kx+m)}_{\to 0}+m\Big)=0+m$$

Samma gäller för sned asymptot då $x\to-\infty$.

$f(x)$ har sned asymptot $y=kx+m \iff \begin{cases} k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ m=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)\end{cases}$

Samma gäller för sned asymptot då $x\to-\infty$.

Ex Beräkna eventuell asymptot för $y=f(x)=xe^{1/x}$ då $x\to-\infty$

Om f har sned asymptot $y=kx+m$ så är

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{\overset{\to 0}{1/x}}=e^0=1 \quad \text{och}$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}(xe^{1/x}-x)=\lim_{x\to-\infty}x(e^{1/x}-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\left[\begin{array}{l}h=1/x\\ \frac{1}{x}\to-\infty\Rightarrow h\to 0-\end{array}\right]=\lim_{h\to0-}\frac{e^h-1}{h}=1$$

för $g(x)=e^x$; $g'(x)=e^x$

$$\frac{e^h-e^0}{h}=\frac{g(0+h)-g(0)}{h}\to g'(0)=e^0 \quad \text{då } h\to 0$$

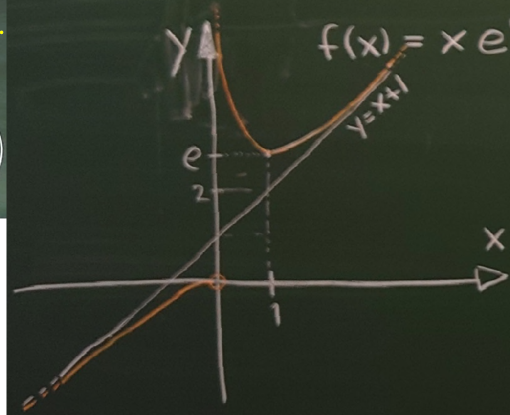
Samma sneda asymptot då $x\to\infty$, som beräknat i PDF-filen i Canvasrummet.

Slutsats $y=x+1$ är sned asymptot då $x\to-\infty$

$$f'(x)=1\cdot e^{1/x}+x\cdot e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$f'(x)=0 \iff x=1$ och $f(1)=e$

$f(x)=xe^{1/x},\quad x\neq 0$



$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\underset{\to 0}{x}\,\underset{\to 0}{e^{\overset{\to-\infty}{\frac{1}{x}}}}=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\underset{\to 0}{x}\,e^{\overset{\to\infty}{1/x}}=\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{x}\\ x\to0+\Rightarrow t\to\infty\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t}=\infty \quad \text{(Exponentialfunktion vinner över potensfunktion)}$$

Lektion 33: Grafritning.
(Adams avsnitt 4.6)

I korthet:

- Räkna ut, faktorisera och teckenstudium för $f'(x)$, $f''(x)$
- Slutsatser om konvex/konkav, växande/avtagande, max/min
- Lodräta asymptoter?
- Vågräta asymptoter
- Sneda asymptoter?

Mer detaljerad lista: sid 248 i Adams

sid 251 i tionde upplagan

①

Tentamen i Differentialkalkyl / Analys 1

Kurskod	M0029M M0023M
Tentamensdatum	2012-05-16
Skrivtid	09.00 – 14.00

Totala antalet uppgifter: 6

Uppgift 4

Bestäm nollställen, lokala extremvärden, inflektionspunkter och asymptoter till kurvan

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$

Skissa kurvan och asymptoter samt ange var funktionen är växande respektive avtagande, samt var funktionen är konkav uppåt respektive nedåt. (5 p)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4-12x^2-2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})}{(x^2-4)^2}$$

		$-\sqrt{12}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$	
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$x-\sqrt{12}$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$x+\sqrt{12}$	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$(x^2-4)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	Ej def	−	0	−	Ej def	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘		↘	sadelpunkt	↘		↘	lok. min	↗

$$f''(x) = \frac{\overbrace{(4x^3-24x)}^{4(x^3-6x)}(x^2-4)^2 - (x^4-12x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{4(x^2-4)\cdot\left((x^3-6x)(x^2-4) - (x^4-12x^2)\cdot x\right)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{4(\cancel{x^5} - 4x^3 - 6x^3 + 24x - \cancel{x^5} + 12x^3)}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{4(2x^3+24x)}{(x^2-4)^3} = \frac{8x\overbrace{(x^2+12)}^{>0}}{(x-2)^3(x+2)^3}$$

②

		-2		0		2	
$8x(x^2+12)$	−	−	−	0	+	+	+
$(x-2)^3$	−	−	−	−	−	0	+
$(x+2)^3$	−	0	+	+	+	+	+
$f''(x)$	−	Ej def	+	0	−	Ej def	+
$f(x)$	∩	Ej def	∪	infl pkt	∩	Ej def	∪

Lodrät asymptot i $x = \pm 2$

Finns sned asymptot? Det kan vi kolla på 2 sätt (välj personlig favorit):

1) Om $y = kx+m$ är asymptot så fås k som gränsvärde av

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} \to 1 \text{ då } x\to\pm\infty \Rightarrow k=1$$

och m fås då som gränsvärde av

$$f(x)-kx = \frac{x^3}{x^2-4} - x = \frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x^3-4x}{x^2-4} = \frac{4x}{x^2-4} = \frac{4x}{x^2(1-\frac{4}{x^2})}$$

$$= \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}}_{\to 1} \to 0 \text{ då } x\to\pm\infty \Rightarrow m=0$$

Alltså är linjen $y = x$ sned asymptot då $x\to\pm\infty$

eller

2) Via polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} & x \quad \text{kvot} \\ x^2-4 & x^3+0x^2+0x+0 \\ & -(x^3 \qquad -4x) \\ & \qquad 4x \quad \text{Rest} \end{array}$$

Ger att $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$

$\to 0$ då $x\to\pm\infty$ som visades ovan

Ingen lodrät asymptot (ty vi har redan hittat sned asymptot då $x\to\pm\infty$.

3 4

SVAR: Nollställen: $x=0,\ f(0)=0$

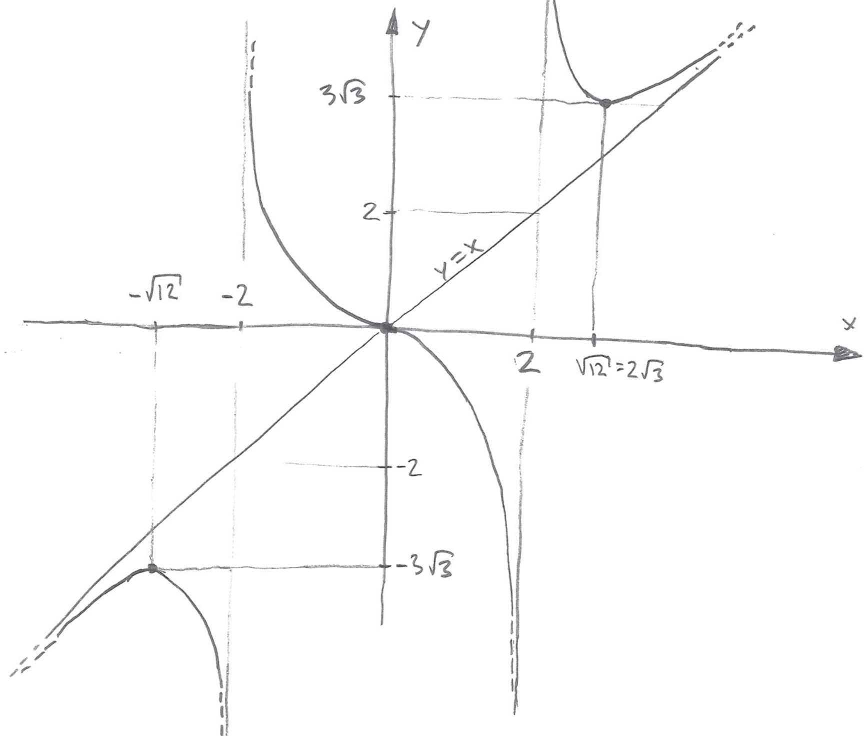
Lokalt min: $f(\sqrt{12}) = \dfrac{\sqrt{12}^{\,3}}{12-4} = \dfrac{\cancel{2^3}\cdot\sqrt{3}^{\,3}}{\cancel{8}} = 3\sqrt{3}$

Lokalt max $f(-\sqrt{12}) = -3\sqrt{3}$

Lodrät asymptot: $x = \pm 2$

Inflektionspunkt: $x = 0$

sned asymptot: $y = x$ då $x \to \pm\infty$



Tentamen i Differentialkalkyl	Ämneskod	M0029M
	Tentamensdatum	2008-12-18

4 Bestäm definitionsmängd, nollställen, lokala extrempunkter, eventuella asymptoter och inflexionspunkter till funktionen

$$y = x\ln|x|$$

Skissera grafen (5p)

För $x>0$ är $\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

För $x<0$ är $\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = x\ln(|x|)$$

$$f'(x) = 1\cdot\ln(|x|) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(|x|)+1$$

Enklare: använd kedjeregeln $\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{1}{|x|}\cdot\operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Definitionsmängd: $x\neq 0$, dock $\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(|x|) = 0$

Finns sned asymptot $y = kx+m$?

I så fall fås k ur gränsvärde för

$$\frac{x\ln(|x|)}{x} = \ln(|x|)$$

men $\ln(|x|)\to\infty$ då $x\to\pm\infty$ så ingen sned asymptot

Inga lodräta asymtoter, ty $f(x)$ definierad för $x\neq 0$ och $\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(|x|) = 0$.

Inga vågräta asymptoter ty $\lim_{x\to\infty} x\ln(|x|) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} x\ln(|x|) = -\infty$

Lokala extrem värden: $0 = f'(x) = \ln(|x|)+1$

$$\ln(|x|) = -1$$

$$|x| = e^{-1}$$

$$x = \pm e^{-1}$$

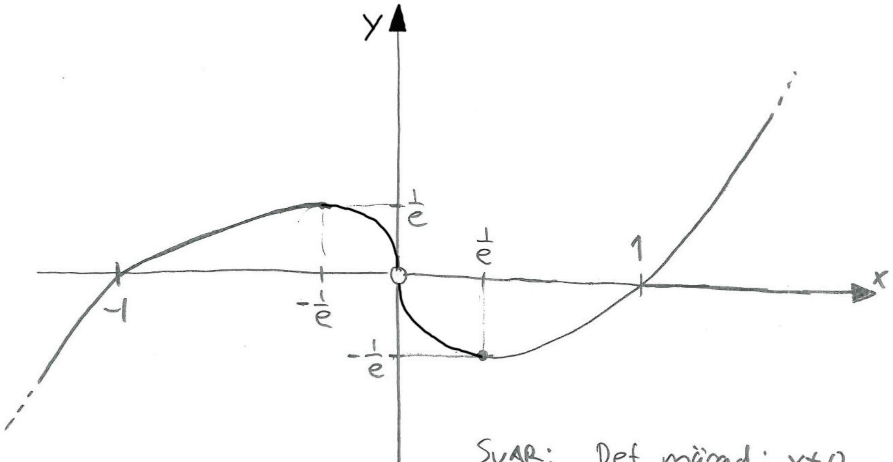
$f(e^{-1}) = e^{-1}\cdot\ln(e^{-1}) = -\frac{1}{e}$ är lokaltmin ty $f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} > 0$

$f(-e^{-1}) = -e^{-1}\cdot\ln(e^{-1}) = \frac{1}{e}$ är lokalt max ty $f''(-e^{-1}) = -\frac{1}{e^{-1}} < 0$

	$-e^{-1}$		0		e^{-1}	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	Ej def	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	Ej def	$\smile$	$\smile$	$\smile$

jämn $f'(x)$	$+$	0	$-$	Ej def	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	Ej def	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

Nollställen: $0 = f(x) = x \cdot \ln(|x|)$, $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $|x| = 1$ $\Rightarrow$ $x = \pm 1$



SVAR: Def mängd: $x \neq 0$

Lok max: $f(-\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$

Lok min: $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

~~Infl. pkt: $x = 0$~~

Inga asymptoter

I definitionen av inflektionspunkt brukar det (som i läroboken) ingå att funktionens graf skall ha en tangent i den punkten (ger till exempel att $g(x) = |x|$ ej har en inflektionspunkt i $x = 0$, ty grafen har en spets och g är ej derivarbar i $x = 0$).

Därför ingen inflektionspunkt här, då $f(x)$ och $f'(x)$ ej är definierade i $x = 0$, så grafen har ingen tangent där. (Dock en hävbar diskontinuitet, så det är lätt att lägga till funktionsvärde 0 för $x = 0$ och få en kontinuerlig funktion med lodrät tangent och inflektionspunkt i $x = 0$.)

5

6 Denna räknade jag igenom kvällen före, men ej på lektionen.

Tentamen i Differentialkalkyl

Kurskod	**M0029M** **M0036M** **MAM141** **MAM221** **MAM281**
Tentamensdatum	2009-12-18
Skrivtid	09.00 – 14.00

3 Bestäm eventuella asymptoter, eventuella lokala extrempunkter samt rita grafen till

$$f(x) = x - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x > -1.$$

$$f(x) = x - \arctan\Big(\overbrace{\frac{x}{x+1}}^{= \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}}\Big) \qquad x > -1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \left(-\frac{0\cdot(x+1) - 1\cdot 1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} = \frac{(x+1)^2 + x^2 - 1}{(x+1)^2 + x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + \cancel{1} + x^2 - \cancel{1}}{(x+1)^2 + x^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(x+1)^2 + x^2} = 2x \overbrace{\frac{x+1}{(x+1)^2 + x^2}}^{>0 \text{ då } x > -1}$$

Kritiska punkter för $x > -1$:

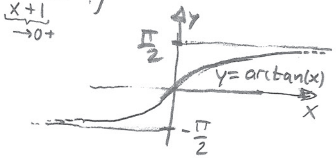
$f'(x) = 0$ om $x = 0$,

	-1		0	
$f'(x)$	Ej def	$-$	0	$+$
$f(x)$	Ej def.	$\searrow$	Lok min $f(0) = 0$	$\nearrow$

Asymptoter? (7)

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} x - \overbrace{\arctan\Big(1 - \overbrace{\frac{1}{\underbrace{x+1}_{\to 0+}}}^{\to\infty}\Big)}^{\to -\infty}$$

$$= -1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\pi}{2}$$



$f(x)$ definierad för $x > -1$

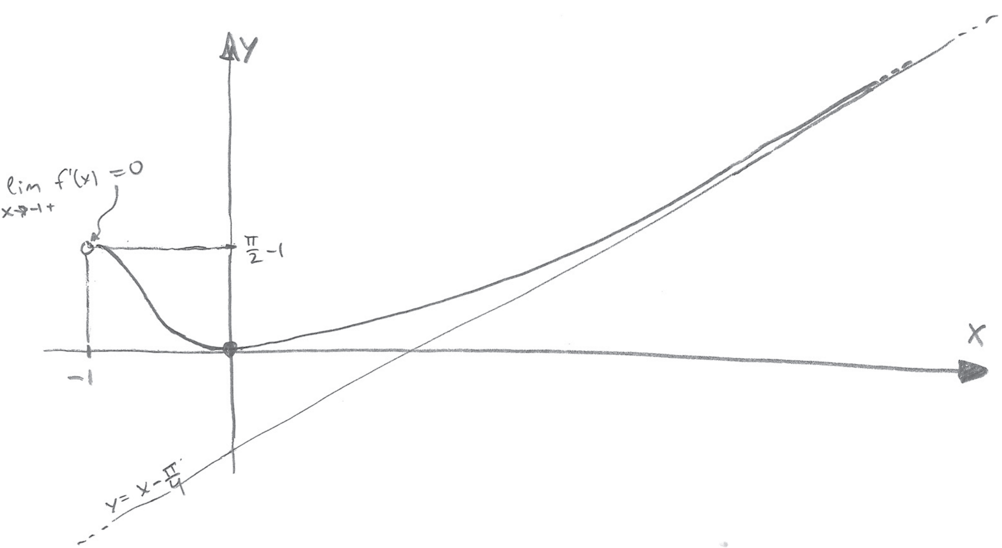
Alltså inga lodräta asymptoter

Om sned asymptot $y = kx+m$ finns då $x \to \infty$ så fås

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \Big(1 + \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}\overbrace{\arctan\Big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{x+1}}_{\to 0}\Big)}^{\to \arctan(1) = \frac{\pi}{4}}\Big) = 1$$

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} -\arctan\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Alltså sned asymptot $y = x - \frac{\pi}{4}$ då $x \to \infty$



(8) Denna räknade jag också igenom kvällen före, men ej på lektionen.

Tentamen i: Differentialkalkyl

Ämneskod	**M0029M**
Tentamensdatum	2010-10-28
Skrivtid	09.00-14.00

Totala antalet uppgifter: 6

5. Bestäm och klassificera lokala extremvärden för kurvan $y = x+2\ln(e^{-2}+e^{-x})$. Hitta eventuella asymptoter. Avgör i vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande. Bestäm i vilka intervall funktionen är konvex respektive konkav. Avgör om det finns inflexionspunkter. (5p)

$$f(x) = x + 2\ln(e^{-2} + e^{-x})$$

$$f'(x) = 1 + 2\frac{-e^{-x}}{e^{-2}+e^{-x}} = \frac{e^{-2}+e^{-x}-2e^{-x}}{e^{-2}+e^{-x}} = \frac{e^{-2}-e^{-x}}{e^{-2}+e^{-x}}$$

$$f''(x) = 2\frac{-e^{-x}\cdot(-1)\cdot(e^{-2}+e^{-x}) - (-e^{-x})\cdot(-e^{-x})}{e^{-2}+e^{-x}} = 2\frac{e^{-x}e^{-2} + \cancel{e^{-x}e^{-x}} - \cancel{e^{-x}e^{-x}}}{(e^{-2}+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{2\,e^{-x-2}}{(e^{-2}+e^{-x})^2} > 0 \Rightarrow \text{Inga inflektionspunkter}$$

Kritiska punkter: $f'(x) = 0$ för $x = 2$

x		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

Lokalt min $f(2) = 2 + 2\ln(2e^{-2}) = 2(1 + \ln(2e^{-2})) =$

$$= 2(1 + \ln(2) + \ln(e^{-2})) = 2(1 + \ln(2) - 2)$$

$$= 2(\underbrace{\ln(2)}_{<\ln(e)=1} - 1) < 0$$

$f(x)$ definierad för alla x, så inga lodräta asymptoter.

Om sned asymptot $y = kx+m$ finns så fås k som gränsvärde

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + 2\frac{\ln(e^{-2}+e^{-x})}{x} = 1 + \frac{\ln\left(\left(\frac{e^{-2}}{e^{-x}} + 1\right)e^{-x}\right)}{x}$$

$$= 1 + 2\frac{\ln\Big(\overbrace{\tfrac{e^{-2}}{e^{-x}}}^{\to 0} + 1\Big)}{x} + 2\frac{-x}{x} \longrightarrow 1 - 2 = -1 \text{ då } x \to -\infty, \text{dvs } k=$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + 2\underbrace{\frac{\ln(\overbrace{e^{-2}+e^{-x}}^{\to e^{-2}})}{x}}_{\to 0} \longrightarrow 1 \text{ då } x \to \infty, \text{ dvs } k = 1$$

9

Sned asymptot då $x \to -\infty$ $(k=-1)$

$$m = \lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + 2\ln(\overbrace{e^{-2}+e^{-x}}^{=e^{-x}\left(\overbrace{\frac{e^{-2}}{e^{-x}}}^{\to 0}+1\right)})$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \cancel{2x} + \cancel{2\overbrace{\ln(e^{-x})}^{=-x}} + 2\ln\left(\overbrace{\frac{e^{-2}}{e^{-x}}}^{\to 0}+1\right) = 2\ln(1) = 0$$

Alltså är $\underline{y=-x \text{ sned asymptot då } x\to-\infty}$

Sned asymptot då $x\to\infty$ $(k=1)$

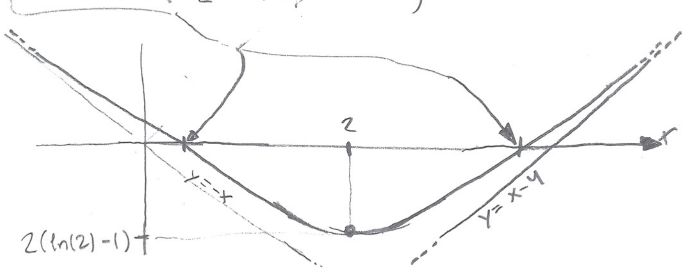
$$m = \lim_{x\to\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\infty} 2\ln(e^{-2}+\overbrace{e^{-x}}^{\to 0}) = 2\ln(e^{-2}) = -4$$

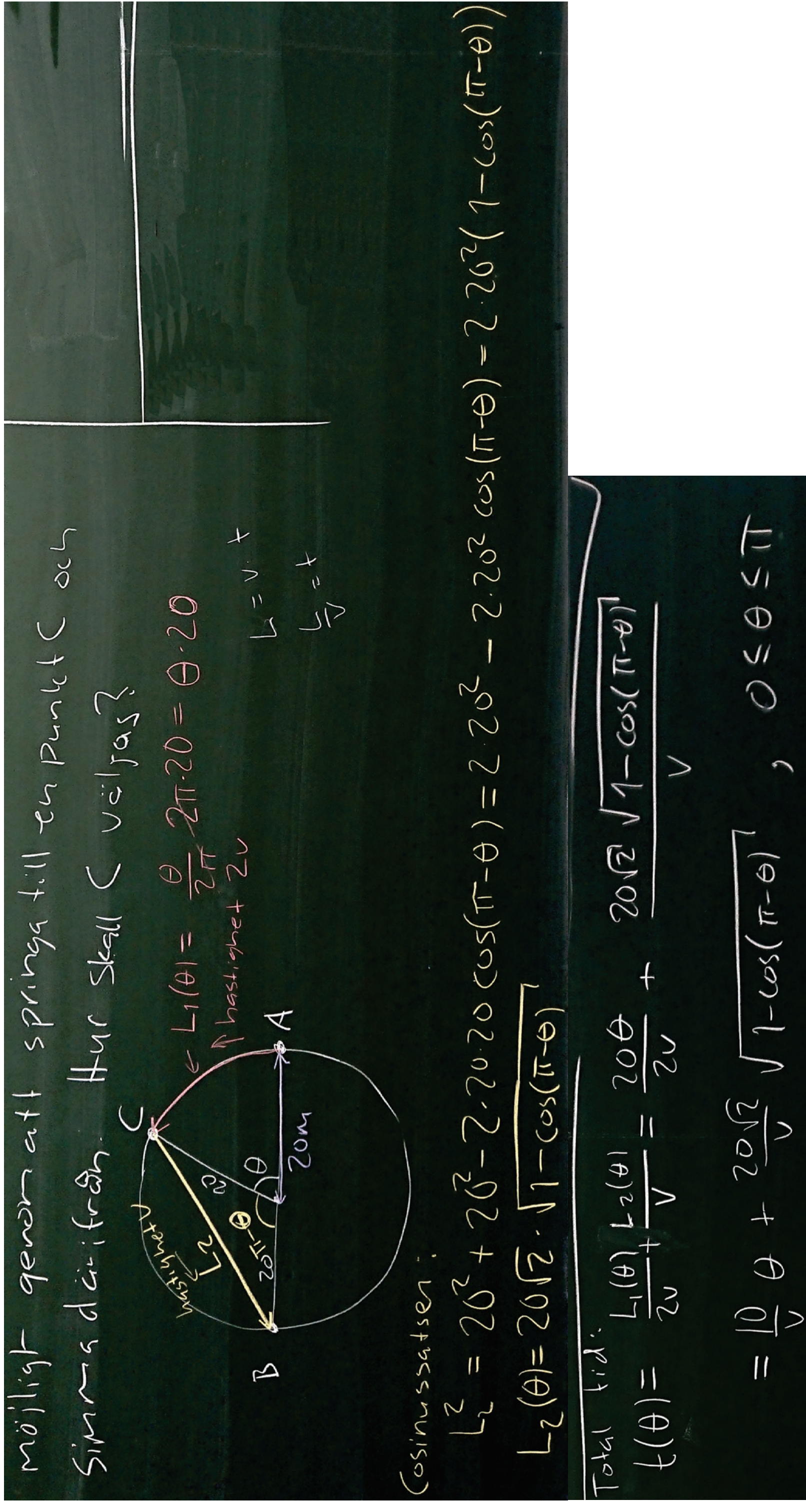
Alltså är $\underline{y = x-4 \text{ sned asymptot då } x\to\infty}$

Följande efterfrågades ej (och lite svårt) men...

Nollställen:
$$0 = f(x) = x + 2\ln(e^{-2}+e^{-x})$$
$$-\frac{x}{2} = \ln(e^{-2}+e^{-x})$$
$$e^{-\frac{x}{2}} = e^{-2}+e^{-x} \quad , \text{ sätt } u = e^{-x/2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\ln(u) = -\frac{x}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -2\ln(u)$$
$$u = e^{-2}+u^2$$
$$u^2-u+e^{-2} = 0$$
$$u = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \underbrace{e^{-2}}_{=\frac{1}{e^2}<\frac{1}{4}}}$$

$$x = -2\ln\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - e^{-2}}\right)$$





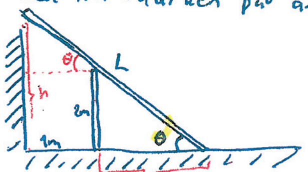
Lite prydligare nedskriven början av poolexemplet (Exempel 5 sidan 3 av kommande sidor). Från 2019.

Lektion 34: Extremvärdesproblem
(Adams avsnitt 4.8, Jönsson avsnitt 11.3)

Olika tillämpade problem

Här var lärobokens variant (nedan) krångligare, så på lektionen räknar jag som på nästa sida istället.

Ex 3 Vilken är längden på den kortaste stege som kan ligga lutad över en 2 m hög mur och gå från en vägg 1 m från muren ned till marken på andra sidan?



$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

Lösning (Här lösning som i boken men utan att blanda in sec(θ))

$$L(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta)}+\frac{2}{\sin(\theta)}$$

$$L'(\theta)=-\frac{1}{\cos^2(\theta)}\cdot(-\sin(\theta))-\frac{2}{\sin^2(\theta)}\cdot\cos(\theta)=\frac{\sin^3(\theta)-2\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}$$

Möjliga extremvärden

- Inga singulära punkter
- Ändpunkter: $\lim_{\theta\to 0+} L(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} L(\theta)=\infty$ inget minimum där
- kritiska punkter: $0=L'(\theta)=\sin^3(\theta)-2\cos^3(\theta)$

$$\sin^3(\theta)=2\cos^3(\theta)$$
$$\tan^3(\theta)=2$$
$$\tan(\theta)=\sqrt[3]{2}$$

Lite extra trixande som man slipper med alternativ lösning på nästa sida.

Ur figuren: $\frac{2}{x}=\tan(\theta)$

$$x=\frac{2}{\tan(\theta)}=\frac{2}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{2/3}$$

$$\frac{h}{1+x}=\tan(\theta)$$

$$h=(1+x)\tan(\theta)=(1+x)\,2^{\frac{1}{3}}$$
$$=(1+2^{2/3})\cdot 2^{\frac{1}{3}}=$$
$$=2^{\frac{1}{3}}+2$$

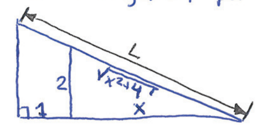
Behövs ej!

$$L=\sqrt{h^2+(1+x)^2}=\sqrt{(1+x)^2\cdot 2^{2/3}+(1+x)^2}=(1+x)\sqrt{2^{2/3}+1}=(1+2^{2/3})\cdot(2^{2/3}+1)^{1/2}$$

$$=(1+2^{2/3})^{3/2}\approx 4{,}16$$

Ex 3 Alternativ lösning

Måste man införa vinkeln θ som i bokens lösning på förra sidan? Nej det finns alltid många sätt att lösa en uppgift och man kan t ex likagärna skriva L som funktion av x i figuren på förra sidan:



Likformiga trianglar:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x+1}{L},\quad 0<x<\infty$$

$$L(x)=\sqrt{x^2+4}\cdot\frac{x+1}{x}=\sqrt{x^2+4}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad 0<x<\infty$$

Inre derivata

$$L'(x)=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^2+4}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Möjliga extremvärden

- Inga singulära punkter
- Inga ändpunkter (men $\lim_{x\to 0} L(x)=\lim_{x\to\infty} L(x)=\infty$, så eventuell kritisk punkt måste vara ett minimum, ty $L(x)$ är kontinuerlig).
- Kritiska punkter: $0=L'(x)$

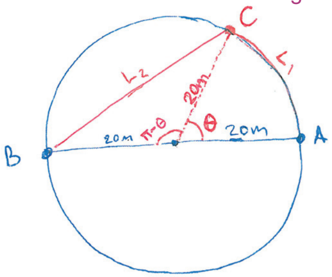
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2+4}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$$
$$\cancel{x^2}+4=x^3+\cancel{x^2}$$
$$x=4^{1/3}$$

SVAR: Minsta möjliga längden blir alltså $L(4^{1/3})=\sqrt{4^{2/3}+4}\,(1+4^{-\frac{1}{3}})\approx 4{,}16$.

Ex 5

En man kan springa dubbelt så fort som han kan simma. Står vid punkt A på kanten av cirkulär swimming pool, 40m i diameter. Vill ta sig till B så fort som möjligt. Hur välja C? (3)

Som nedan på lektionen. Utan den gulmarkerade omskrivningen blir det som på nästa sida, vilket också är en framkomlig väg, men lite krångligare beräkningar.



$0 \le \theta \le \pi$

$L_1 = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 20 = 20\theta$ m

$L_2^2 = \underbrace{20^2+20^2}_{2\cdot 20^2} - 2\cdot 20^2 \cdot \cos(\pi-\theta) = 2\cdot 20^2\,(1-\cos(\pi-\theta))$

$L_2^2 = 4\cdot 20^2\,\frac{1-\cos\left(2\,\frac{\pi-\theta}{2}\right)}{2} = 4\cdot 20^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$

Boken gör denna omskrivning för att bli av med rottecken i formel för L_2, men går att lösa även utan denna omskrivning, se nästa sida.

$L_2 = 2\cdot 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = 40\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Om han springer med hastighet $2v$ och simmar med hastighet v så blir tiden

$t(\theta) = \frac{L_1}{2v} + \frac{L_2}{v} = \frac{\cancel{20}^{10}\,\theta}{\cancel{2}v} + \frac{40\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{v} = \frac{1}{v}\left(10\theta + 40\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$t'(\theta) = \frac{1}{v}\left(10 - 40\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{v}\left(1 - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Alla möjliga extremvärden:

- Ändpunkter: $t(0) = \frac{1}{v}\cdot 40\cos(0) = \frac{40}{v}$

  $t(\pi) = \frac{1}{v}(10\pi + 0) = \frac{10\pi}{v} \approx \frac{31{,}4}{v}$

- Singulära punkter: Inga
- Kritiska punkter: $0 = t'(\theta) = \frac{10}{v}\left(1-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

  $\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

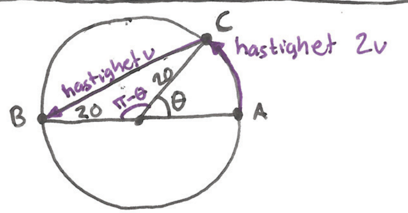
  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t(\theta) = \frac{1}{v}\left(\frac{10\pi}{3} + 40\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\sqrt{3}/2}\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{10\pi}{3} + 20\sqrt{3}\right)$

$= \frac{10}{v}\left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) \approx \frac{45{,}11}{v}$

Globalt minimum fås för $\theta = \pi$, dvs mannen bör springa hela vägen.

(4) **Ex 5 (s.263) utan omskrivningen av L_2 på förra sidan**



$AC = \cancel{2\pi}\cdot 20 \cdot \frac{\theta}{\cancel{2\pi}} = 20\theta$ meter

Tid: $t_1 = \frac{20}{2v}\theta = \frac{10}{v}\theta$

Cosinussatsen ger att

$CB^2 = 20^2 + 20^2 - 2\cdot 20\cdot 20 \cdot \cos(\pi-\theta)$

$CB = \sqrt{2\cdot 20^2(1-\cos(\pi-\theta))} = 20\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\pi-\theta)}$

Tid: $t_2 = \frac{20\sqrt{2}}{v}\sqrt{1-\cos(\pi-\theta)}$

Total tid: $t(\theta) = t_1 + t_2 = \frac{10}{v}\theta + \frac{20\sqrt{2}}{v}\sqrt{1-\cos(\pi-\theta)}$, $0 \le \theta \le \pi$

$t'(\theta) = \frac{10}{v} + \frac{20\sqrt{2}}{v}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-(-\sin(\pi-\theta)\cdot(-1))}{\sqrt{1-\cos(\pi-\theta)}} = \frac{10}{v} - \frac{10\sqrt{2}}{v}\,\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sqrt{1-\cos(\pi-\theta)}}$

Extremvärden

- Ändpunkter: $t(0) = \frac{20\sqrt{2}}{v}\sqrt{1-(-1)} = \frac{40}{v}$

  $t(\pi) = \frac{10\pi}{v} + \frac{20\sqrt{2}}{v}\sqrt{1-1} = \frac{10\pi}{v} \approx \frac{31{,}4}{v}$

- Singulära punkter: $\theta = \pi$ (redan undersökt) ser ut att vara singulär men blir av typ $\frac{0}{0}$ och förlängning med konjugat ger

  $t'(\theta) = \frac{10}{v} - \frac{10\sqrt{2}}{v}\cdot\frac{\sin(\pi-\theta)\cdot\sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}}{\sqrt{1-\cos(\pi-\theta)}\sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}} =$

  $= \frac{10}{v} - \frac{10\sqrt{2}}{v}\cdot\frac{\overbrace{\sin(\pi-\theta)}^{\ge 0}\cdot\sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}}{\underbrace{\sqrt{1-\cos^2(\pi-\theta)}}_{=\sin^2(\pi-\theta)}} =$

  $= \frac{10}{v} - \frac{10\sqrt{2}}{v}\underbrace{\sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}}_{\ge 0}$

  Alltså inga singulära punkter.

- Kritiska punkter: $t'(\theta) = 0$

  $\cancel{\frac{10}{v}}\left(1 - \sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}\right) = 0$

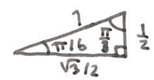
  $1 = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}$

  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}$

  $\frac{1}{2} = 1 + \cos(\pi-\theta)$ >0 så vi kan ej få falsk lösning

  $-\frac{1}{2} = \cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$

  $\frac{1}{2} = \cos(\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$



  $\theta = \frac{\pi}{3}$

$t\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{10}{v}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{20\sqrt{2}}{v}\sqrt{1-\underbrace{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}_{=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}}} = \frac{10}{v}\left(\frac{\pi}{3} + 2\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) \approx \frac{45{,}11}{v}$

Alltså: $t\left(\frac{\pi}{3}\right) > t(0) > t(\pi)$

Svar: Kortast möjliga tid $\frac{10\pi}{v}$ fås genom att springa hela vägen.

Uppgift 4.8.2

5

För $a,b>0$ sådana att $a\cdot b=8$ söks minimum för $a+b$.
Vi har alltså $b=\frac{8}{a}$ och söker globalt minimum för summan

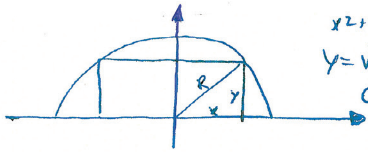
$$s(a)=a+b=a+\frac{8}{a},\quad a>0$$

Inga singulära punkter och $s(a)\to\infty$ både då $a\to 0+$ och då $a\to\infty$ så minimum måste fås i en kritisk punkt:

$$0=s'(a)=1-\frac{8}{a^2}$$
$$\frac{8}{a^2}=1,\quad a>0$$
$$a=\sqrt{8}$$

SVAR: Minimum är $s(\sqrt{8})=\sqrt{8}+\frac{8}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}+\sqrt{8}=2\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{4\cdot 2}=4\sqrt{2}$

Uppg. 4.8.12



$x^2+y^2=R^2$
$y=\sqrt{R^2-x^2}$
$0\le x\le R$

Omkrets $O(x)=4x+2y=4x+2\sqrt{R^2-x^2}$

$$O'(x)=4+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\cdot(-2x)=4-\frac{2x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

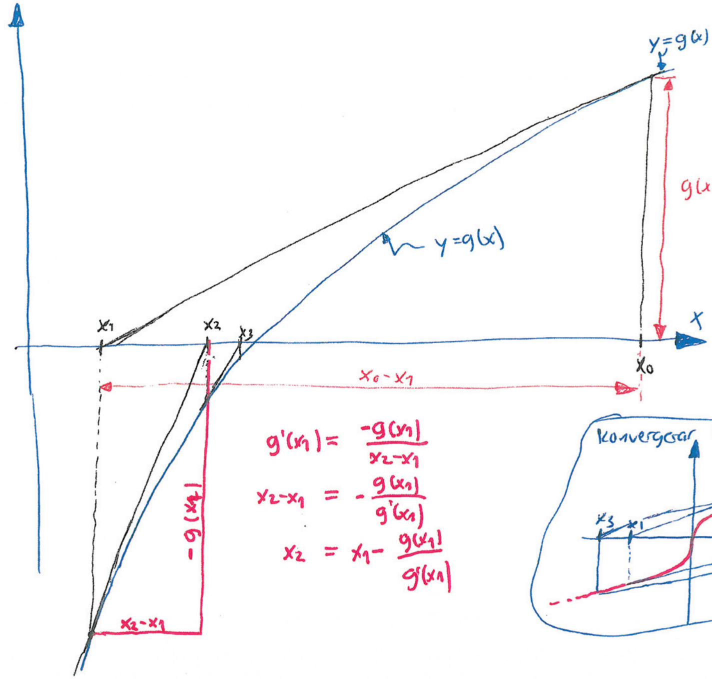
Kritiska punkter

$$0=O'(x)=4-\frac{2x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$
$$4\sqrt{R^2-x^2}=2x,\quad \text{under förutsättning } 0\le x\le R$$
$$16(R^2-x^2)=4x^2$$
$$16R^2-16x^2=4x^2$$
$$16R^2=20x^2,\quad 0\le x\le R$$
$$x=\sqrt{\tfrac{4}{5}}R=\frac{2}{\sqrt5}R\Rightarrow O(\tfrac{2}{\sqrt5}R)=4\cdot\tfrac{2}{\sqrt5}R+2\sqrt{R^2-\tfrac{4}{5}R^2}$$
$$=\frac{8}{\sqrt5}R+2\cdot\frac{1}{\sqrt5}R=\frac{10}{\sqrt5}R=2\sqrt5 R\approx 4{,}47R$$

Ändpunkter
$O(0)=2R$
$O(R)=4R$

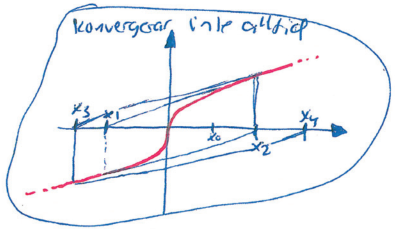
Inga singulära punkter.

SVAR: Alltså: Maximal omkrets är $O(\frac{2}{\sqrt5}R)=2\sqrt5 R\approx 4{,}47R$



$$g'(x_0)=\frac{g(x_0)}{x_0-x_1}$$
$$x_0-x_1=\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$
$$x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=x_1$$

$$g'(x_1)=\frac{-g(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$x_2-x_1=-\frac{g(x_1)}{g'(x_1)}$$
$$x_2=x_1-\frac{g(x_1)}{g'(x_1)}$$



Starta med en gissning x_0, t ex genom att skissa upp funktionskurvorna

Newton-Raphsons metod för att lösa ekvation $f(x)=h(x)$

- Sätt $g(x)=f(x)-h(x)$
- Starta med en gissning x_0 till nollställe för $g(x)$ t ex genom att skissa upp funktionskurvorna.
- Räkna ut nya gissningar $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ med formeln
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ex: Hitta lösning i intervallet $[0,1]$ till ekvationen $x^3=-2x^2+2$

Lösn: definiera $g(x)=x^3+2x^2-2$
$$g'(x)=3x^2+4x$$

Gissning $x_0=0{,}5$

$$x_1=x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=x_0-\frac{x_0^3+2x_0^2-2}{3x_0^2+4x_0}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+2x_n^2+2}{3x_n^2+4x_n}$$

$x_0=0.500000000000000$
$x_1=1.000000000000000$
$x_2=0.857142857142857$
$x_3=0.839544513457557$
$x_4=0.839286810068019$
$x_5=0.839286755214164$
$x_6=0.839286755214161$
$x_7=0.839286755214161$
$x_8=0.839286755214161$
$x_9=0.839286755214161$
$x_{10}=0.839286755214161$

② Linjär approximation av $f(x)$ kring $x = x_0$

$\Updownarrow$

Approximera med tangenten genom $(x_0, f(x_0))$

$\Updownarrow$

Approximera med rät linje $y = L(x)$ sådan att

$L(x_0) = f(x_0)$ och $L'(x_0) = f'(x_0)$

För en bättre approximation kan vi välja ett polynom av grad n med funktionsvärde och de n första derivatorna samma som för f i x_0

$$\boxed{P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \Rightarrow P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n'(x) = \frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{\cancel{2!}} \cdot \cancel{2}(x-x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot 3(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n \cdot (x-x_0)^{n-1} \Rightarrow P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$P_n''(x) = \frac{f''(x_0)}{\cancel{2!}} \cdot \cancel{2 \cdot 1} + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot 3 \cdot 2\,(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n \cdot (n-1) \cdot (x-x_0)^{n-2} \Rightarrow P_n''(x_0) = f''(x_0)$$

$$P_n^{(3)}(x) = \frac{f^{(3)}(x_0)}{\cancel{3!}} \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\,(x-x_0)^{n-3} \Rightarrow P_n^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_0)$$

$\vdots$

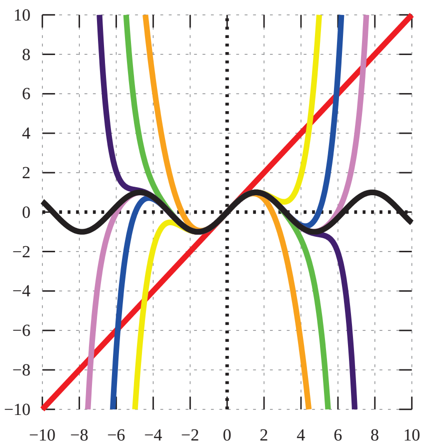
$$P_n^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{\cancel{n!}} \cdot \cancel{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1} \Rightarrow P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Definition

P_n kallas Taylorpolynomet av ordning n för funktionen f kring punkten x_0.

MacLaurin polynom = Taylor polynom med $x_0 = 0$.

För x nära x_0, hur stort är felet $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$?



As the degree of the Taylor polynomial rises, it approaches the correct function. This image shows $\sin x$ and its Taylor approximations by polynomials of degree 1, 3, 5, 7, 9, 11, and 13 at $x = 0$.

③

Sats 12

Antag att f är $n+1$ gånger deriverbar på slutna intervallet med ändpunkter x_0, x. Låt $P_n(x)$ vara Taylorpolynomet av ordning n för f kring punkten x_0. Då är $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ med felterm

$[x_0, x]$ eller $[x, x_0]$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ för något s i öppna intervallet mellan x_0 och x.

(x_0, x) eller (x, x_0)

Felet $E_n(x)$ kallas ibland Lagranges restterm (Lagrange remainder)

Bevis: För x_0, x givna vill vi välja M så att $f(x) - (P_n(x) + M \cdot (x-x_0)^{n+1}) = 0$.

Sätt $g(t) = f(t) - P_n(t) - M \cdot (t-x_0)^{n+1}$

där vi väljer konstanten M så att $g(x) = 0$. ($M = M_{x_0,x}$ beror alltså av x_0 och x men inte av t)

$$\left.\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P_n(t) - M \cdot (t-x_0)^{n+1} \\ g'(t) &= f'(t) - P_n'(t) - M \cdot (n+1)(t-x_0)^n \\ g''(t) &= f''(t) - P_n''(t) - M \cdot (n+1) \cdot n \cdot (t-x_0)^{n-1} \\ &\vdots \\ g^{(n)}(t) &= f^{(n)}(t) - \underbrace{P_n^{(n)}(t)}_{\text{Konstant!}} - M \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2\,(t-x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

För $k = 0, 1, 2, \dots, n$ är

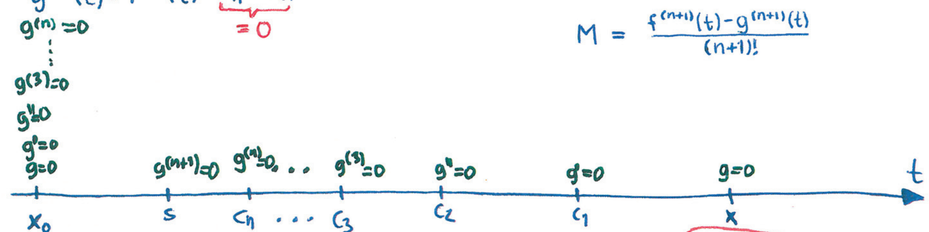
$g^{(k)}(x_0) = \underbrace{f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0)}_{=0} - M \cdot 0$

$g^{(k)}(x_0) = 0$

Med notation $g^{(0)}(x) = g(x)$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{P_n^{(n+1)}(t)}_{=0} - M \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = f^{(n+1)}(t) - M \cdot (n+1)!$$

$$M = \frac{f^{(n+1)}(t) - g^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \quad (*)$$



Rolles sats: $g'(c_1) = 0$ för något c_1 i (x_0, x)

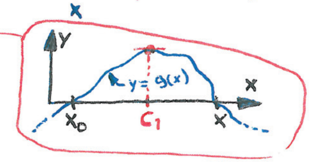
Rolles sats: $g''(c_2) = 0$ för något c_2 i (x_0, c_1)

Rolles sats: $g^{(3)}(c_3) = 0$ för något c_3 i (x_0, c_2)

$\vdots$

Rolles sats: $g^{(n)}(c_n) = 0$ för något c_n i (x_0, c_{n-1})

Rolles sats: $g^{(n+1)}(s) = 0$ för något s i (x_0, c_n). Sätt in detta och $t = s$ i $(*)$.



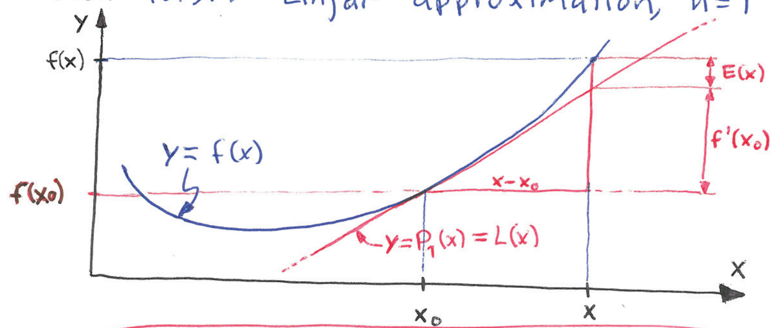
$$M = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}$$

VSB!

4

Nästa lektion: gradtal $n > 1$

Men först: Linjär approximation, $n = 1$



$$\boxed{\text{Felet } E(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2 \text{ för något } c \text{ mellan } x \text{ och } x_0.}$$

Om vi till exempel vet att $A \leq |f''(t)| \leq B$ i något intervall som innehåller x_0 så blir $|E(x)| \leq \frac{B}{2}(x-x_0)$ i det intervallet

Ex: För att räkna ut approximation av $\sqrt{26}$ kan vi sätta $x_0 = 25$ och $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. $(x = 26)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x^{3/2}}$$

Tentamensdatum	2007-03-17
Skrivtid	09.00-14.00

4a. Bestäm ett taylorpolynom av grad 2 i punkten $x = \pi$ till funktionen $f(x) = e^{\cos x}$ (2p)

b. Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{26}$ via linjär approximation kring punkten $x = 25$ och ange med hjälp av lagranges restterm det minsta intervall var det exakta värdet ligger. (3p)

a) $f'(x) = -e^{\cos(x)}\sin(x)$

$f''(x) = +e^{\cos(x)}\sin^2(x) - e^{\cos(x)}(\cos(x))$

$P_2(x) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2$

$= e^{-1} - \frac{e^{-1}\cdot(-1)}{2!}(x-\pi)^2$

$$\sqrt{26} = f(26) = f(25) + (26-25)\cdot f'(25) + \frac{f''(c)}{2!}(\underbrace{26}_{x} - \underbrace{25}_{x_0})^2$$

för något c i intervallet $(25, 26)$. Alltså är

$$\sqrt{26} = \sqrt{25} + 1\cdot\frac{1}{2\sqrt{25}} + \frac{f''(c)}{1\cdot 2}\cdot 1 = 5 + \frac{1}{10} + \frac{f''(c)}{2} = 5{,}1 + \frac{f''(c)}{2}$$

Felet är

$$E(26) = \frac{f''(c)}{2} = -\frac{1}{2\cdot 4c^{3/2}} = -\frac{1}{8\sqrt{c}^3}, \quad 25 < c < 26.$$

Avtagande!

d vs $E(26)$ är negativt och

$$0 < |E(26)| < \frac{1}{8\sqrt{25}^3} = \frac{1}{8\cdot 5^3} = \frac{1}{8\cdot 125} = \frac{1}{1000}.$$

Man *kan* göra en noggrannare approximation $\frac{1}{8\sqrt{36}^3} < |E(26)| < \frac{1}{8\sqrt{25}^3}$, men vi nöjer os med 0 som undre gräns för sådana här uppgifter i den här kursen.

Alltså är $\underline{5{,}099 < \sqrt{26} < 5{,}1}$

5

Ex 5 För att räkna ut en approximation av $\cos(36°) = \cos(\frac{\pi}{5})$ kan vi sätta $x_0 = \frac{\pi}{6}$ och

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f'(x) = -\sin(x)$$
$$f''(x) = -\cos(x)$$

Linjär approximation:

$$\cos(36°) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''(c)}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

för något c i intervallet $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}\right)$.

Insättning av

$$\frac{6\cdot\pi}{6\cdot 5} - \frac{5\cdot\pi}{5\cdot 6} = \frac{6\pi - 5\pi}{30} = \frac{\pi}{30}$$

Alternativt $\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = 36° - 30° = 6° = 6\cdot\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{30}$ radianer.

ger att

$$\cos(36°) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{30}\cdot f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''(c)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\pi^2}{30^2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{30}\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + \frac{-\cos(c)}{2}\cdot\frac{\pi^2}{30^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{30}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\cos(c)}{2}\cdot\frac{\pi^2}{30^2}$$

$$= 0{,}81367 - \underbrace{\frac{\cos(c)\cdot\pi^2}{1800}}_{E(\frac{\pi}{5})}$$

För $\frac{\pi}{6} < c < \frac{\pi}{5}$ så är $0 < \cos(\frac{\pi}{5}) < \cos(c) < \cos(\pi/6)$, så feltermen är

$$0 < \frac{\cos(c)\cdot\pi^2}{1800} < \frac{\cos(\pi/6)\cdot\pi^2}{1800} = \frac{\sqrt{3}/2\cdot\pi^2}{1800}$$

$$0 < E\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{3}\cdot\pi^2}{3600} < 0{,}00475$$

Alltså har vi stängt in $\cos(\frac{\pi}{5})$ i intervallet

$$0{,}81367 - 0{,}00475 < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0{,}81367$$

SVAR: $0{,}80892 < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0{,}81367$

Lektion 36-37: Taylorpolynom av grad >1

(Adams avsnitt 4.10, Derivator, integraler och sånt ... avsnitt 5.4, 5.6)

1

4.10. 15 $f(x) = \cos(x)$, räkna ut Taylorpolynom av grad 6 och resttem kring punkten $x_0 = 0$.

$f^{(5)}(x) = f^{1}(x) = -\sin(x)$
$f^{(6)}(x) = f^{4}(x) = -\cos(x)$
$f^{(7)}(x) = f^{(3)}(x) = \sin(x)$
$f^{(4)}(x) = \cos(x) = f(x)$

$$\cos(x) = P_n(x) + E_n(x) = f(0) + \frac{\overbrace{f'(0)}^{=0}}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{\overbrace{f^{(3)}(0)}^{=0}}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{\overbrace{f^{(7)}(0)}^{=0}}{7!} + E_7(x)$$

$(x-0)^2 = x^2$

$$= 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(s)}{7!}x^7 \quad \text{för något } s \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Uppgift 4.10.10

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$
$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$, $x_0 = 64$

$$f(x) = P_2(x) + E(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + E(x), \quad E(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-x_0)^3, \text{ något } s \text{ mellan } x_0 \text{ och } x$$

För $x_0 = 64$ är

$$\sqrt{61} \approx P_2(61) = 8 + \frac{1}{2\cdot 8}(61-64) + -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot 8^3}(61-64)^2 = 8 - \frac{3}{16} - \frac{9}{8^4} \approx 7,810302734$$

$$E(61) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(61-64)^3 = -\frac{3^3}{2\cdot 3}f^{(3)}(s) = -\frac{9}{2}f^{(3)}(s) \quad \text{för något } s \text{ i } (61, 64)$$

$$|E(61)| = \left|\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{8}\frac{1}{s^{5/2}}\right| < \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{49^{5/2}} \approx 0,000\,1004$$

Närmaste jämna kvadrat nedåt om vi låtsas att vi inte kan räkna ut $\sqrt{61}$

$$7,8103027 - 0,0001004 < \sqrt{61} < 7,8103027$$

$$7,81020 < \sqrt{61} < 7,81031$$

2

Tentamen i Differentialkalkyl / Analys 1

Kurskod	**M0029M** **MAM221** **M0023M** **M0036M-0002**

Tentamensdatum	2010-08-18
Skrivtid	09.00 – 14.00

Totala antalet uppgifter: 6

Uppgift 5

Givet funktionen

$$y(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(a) Visa att $y(x)$ är en lösning till differentialekvationen

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0. \qquad \text{(2 p)}$$

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $y(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ kring punkten $x_0 = 1$. (2 p)

(c) Använd Lagranges restterm för att uppskatta det maximala felet, då Taylorpolynomet från (b) används till att approximera $y(11/10)$. (1 p)

(a) $y(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

$$y'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$y''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x(1-\ln(x))}{x^4} = -\frac{1+2(1-\ln(x))}{x^3}$$

$$= -\frac{3-2\ln(x)}{x^3} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{2\ln(x)-3}{x} + \frac{3x}{x^2}\cdot(1-\ln(x)) + \frac{\ln(x)}{x} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\cancel{2\ln(x)} - 3 + 3 - \cancel{3\ln(x)} + \cancel{\ln(x)}\right) = 0 \quad \text{V.S.V.}$$

(b)
$$P_2(x) = y(\overset{x_0=1}{1}) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 =$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{1-0}{1^2}\cdot(x-1) + \frac{2\cdot 0-3}{1^3\cdot 2!}(x-1)^2 = x-1 - \frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$= x-1 - \frac{3}{2}(x^2-2x+1) = \underline{\underline{-\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2}}}$$

(c)
$$y^{(3)}(x) = \frac{\frac{2}{x}\cdot x^3 - (2\ln(x)-3)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2-6\ln(x)+9}{x^4} = \frac{11-6\ln(x)}{x^4}$$

$y(x) = P_2(x) + E(x)$, där för något s mellan $x_0 = 1$ och x

$$E(\overbrace{\tfrac{11}{10}}^{x}) = \frac{y^{(3)}(s)}{3!}\left(\frac{11}{10}-1\right)^3 = \frac{11-6\ln(s)}{6s^4}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{11-6\ln(s)}{6000s^4} > 0, \text{ för något } s \in (1, \tfrac{11}{10}).$$

$11 - 6\ln(x) > 11 - 6\cdot\ln(e) = 5$

$E(\frac{11}{10}) = \frac{1}{6000s^4}\cdot(11-6\ln(s))$ där båda faktorerna är strängt avtagande funktioner av s.

$s=1$ maximerar felet

SVAR: $0 < E(x) = \dfrac{11-6\ln(s)}{6000s^4} < \underline{\underline{\dfrac{11}{6000}}}$.

Detta räcker t om uppg 19

L37 Ordo-notation och använda Taylorutvecklingar från tabell

Vanlig notation för att ange att två funktioner går "ungefär lika snabbt" mot 0:

DEFINITION

Om $|f(x)| \leq K\,|u(x)|$ för någon konstant K och i något intervall som innehåller x_0 så säger vi att $f(x) = O(u(x))$ då $x \to x_0$.

ordo

Om ovanstående gäller och $h(x) = g(x) + f(x)$ så skriver vi att $h(x) = g(x) + O(u(x))$ då $x \to x_0$

Ex: I uppgift 4.10.16 visade vi för $x_0 = 0$ att

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\sin(s)}{7!}x^7 \quad \text{för något } s \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Vi vet inte vad s är och normal sett bryr man sig inte, utan det viktiga är att feltermen avtar som "nån konstant gånger x^7" eller mer precist (via definitionen ovan)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^7) \quad \text{då } x \to 0$$

Antag nu att vi på två olika sätt räknar ut approximationer

$$f(x) = P_n(x) + O((x-x_0)^{n+1}) \qquad (1)$$

$$f(x) = Q_n(x) + O((x-x_0)^{n+1}) \qquad (2)$$

Med P_n Taylorpolynom av grad n och Q_n polynom av grad n.
Kan Q_n och P_n vara olika?

Låt $R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) =$ polynom av grad högst n, $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k$.

På något intervall som innehåller x_0 ger (1) och (2) att

$$|f(x) - P_n(x)| \leq K_1 \cdot |x-x_0|^{n+1}$$

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq K_2 \cdot |x-x_0|^{n+1}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k\right| = |R_n(x)| = |P_n(x) - Q_n(x)| = |P_n(x) - f(x) + f(x) - Q_n(x)| \leq$$

Triangelolikheten sid 8 i Adams

$$\leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - Q_n(x)| \leq (K_1 + K_2) \cdot |x-x_0|^{n+1}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k \underbrace{\frac{(x-x_0)^k}{|x-x_0|^{n+1}}}_{\pm\frac{1}{(x-x_0)^{\overbrace{n+1-k}^{>0}}}}\right| \leq K_1 + K_2 \quad \text{möjligt bara om alla } c_k = 0, \; R_n(x) = 0,$$

$\to \pm\infty$ då $x \to x_0+$ eller $x \to x_0-$

dvs $P_n(x) = Q_n(x)$

$$c_k = 0 \iff R_n(x) = 0 \iff P_n(x) = Q_n(x)$$

Slutsats:

Sats 13

Om $f(x) = Q_n(x) + O((x-x_0)^{n+1})$ då $x \to x_0$ och Q_n är ett polynom av grad högst n, då är Q_n Taylorpolynomet av ordning n för f kring punkten x_0

Detta kan man utnyttja för att räkna ut Taylorpolynom från liknande redan uträknade från tabell i formelsamling som ser ut ungefär som tabell 5 på sid 277 i boken:

Table 5. Some Maclaurin Formulas with Errors in Big-O Form

As $x \to 0$:

(a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$

(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$

(c) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$

(d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$

(e) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$

(f) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$

Exempel 7: Räkna ut Taylorpolynom av ordning 3 för e^{2x} kring $x_0 = 1$ från motsvarande ur tabellen:

Vill ha in $(x-1)^4$ här

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$e^{2x} = e^{2(x-1+1)} = e^{2(x-1)}e^2 = \left(1 + 2(x-1) + \frac{(2(x-1))^2}{2!} + \frac{(2(x-1))^3}{3!} + O((2(x-1))^4)\right)e^2$$

$$= e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4e^2}{3}(x-1)^3 + O((x-1)^4)$$

Derivator, integraler och sånt...

5.14 d) via tabell

$$\ln(2+x) = \ln(1+(x+1)) = (x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{(x+1)^n}{n} + O((x+1)^{n+1})$$

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi(x+1-1)) = \sin(\pi(x+1) - \pi) =$$

$$= \sin(\pi(x+1))\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \cos(\pi(x+1))\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -\sin(\pi(x+1))$$

$$= -\left(\pi(x+1) - \frac{(\pi(x+1))^3}{3!} + \frac{(\pi(x+1))^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{(\pi(x+1))^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{O((\pi(x+1))^{2n+3})}_{=O((x+1)^{2n+3})}\right)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(2+x)}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to -1}\frac{x+1 + O((x+1)^2)}{-\pi(x+1) + O((x+1)^3)} = \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(1 + \overbrace{O(x+1)}^{\to 0})}{\cancel{(x+1)}(-\pi + \underbrace{O((x+1)^2)}_{\to 0})} = -\frac{1}{\pi}$$

Kurs: M0029M, Differentialkalkyl
Tentamensdatum: 2008-10-28
Skrivtid: 09.00 - 14.00
Antal uppgifter: 5

5

3. Låt $f(x) = e^{3x} - \tan(2x) - x - 1$.

   (a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2, vid utveckling kring $x = 0$. (3 p)

   (b) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$
   Ledning: Använd Taylorutveckling (2 p)

(a)
$$f(x) = e^{3x} - \tan(2x) - x - 1$$
$$f'(x) = e^{3x}\cdot 3 - \frac{2}{\cos^2(2x)} - 1$$

$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$$f''(x) = 9e^{3x} - 2\cdot\left(-\frac{2}{\cos^3(2x)}\right)\cdot(-\sin(2x)\cdot 2)$$
$$= 9e^{3x} - \frac{8\sin(2x)}{\cos^3(2x)}$$

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + 0x + \frac{9}{2}x^2$$

SVAR: $\underline{P_2(x) = \frac{9}{2}x^2}$

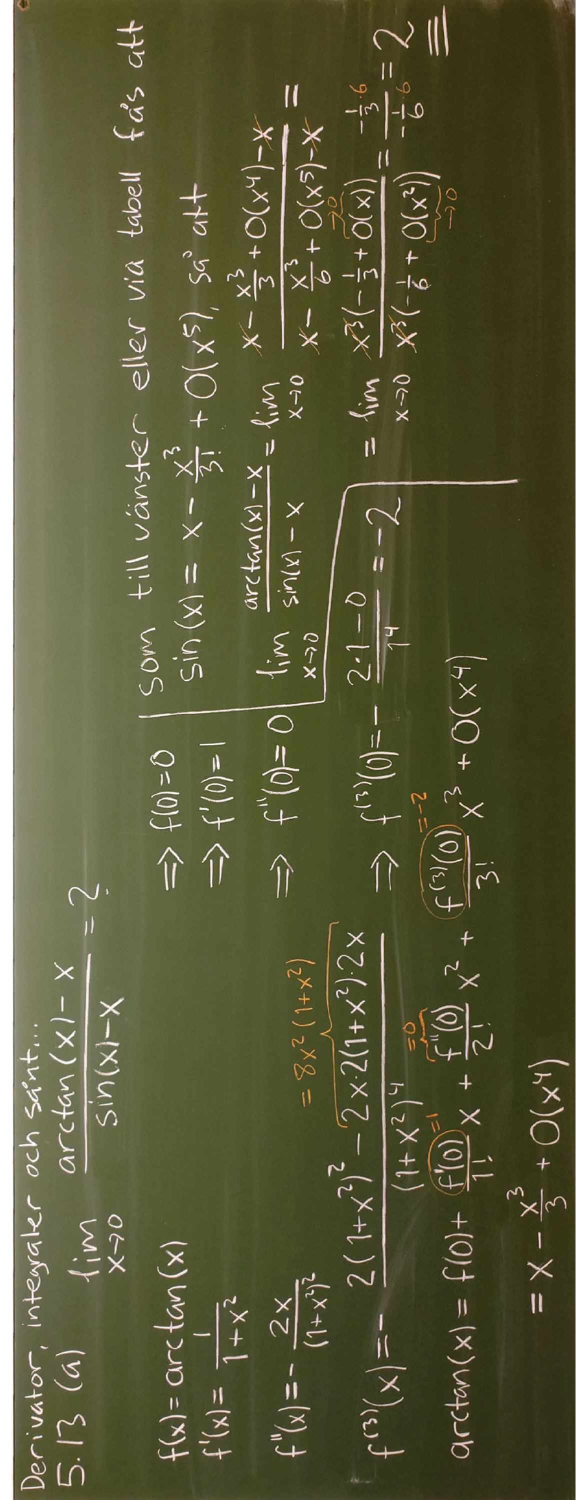
(b) Vi har att $f(x) = P_2(x) + O(x^3)$

dvs $f(x) = P_2(x) + E(x)$ där $|E(x)| < B|x^3|$, B konstant

Alltså är
$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{9}{2}x^2 + E(x)}{x^2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{9}{2} + \frac{E(x)}{x^2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$0 < \underbrace{\left|\frac{E(x)}{x^2}\right|}_{\to 0 \text{ enligt instängnings-satsen}} = \frac{|E(x)|}{x^2} < \frac{B|x^3|}{x^2} = B|x| \to 0$$

SVAR: $\frac{9}{2}$



Från Lektion 38 2023