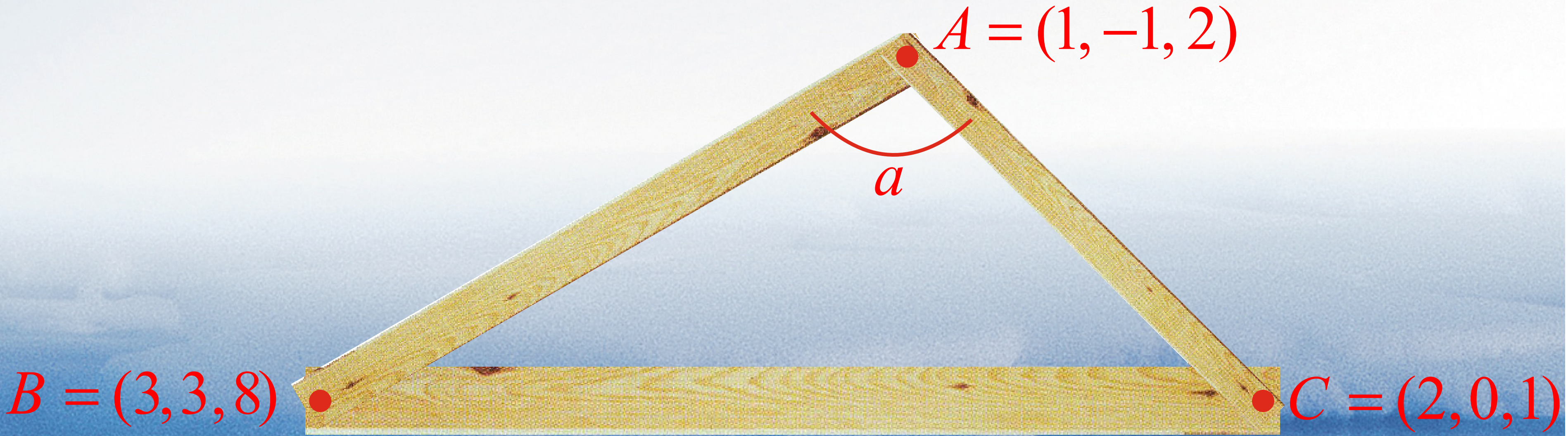
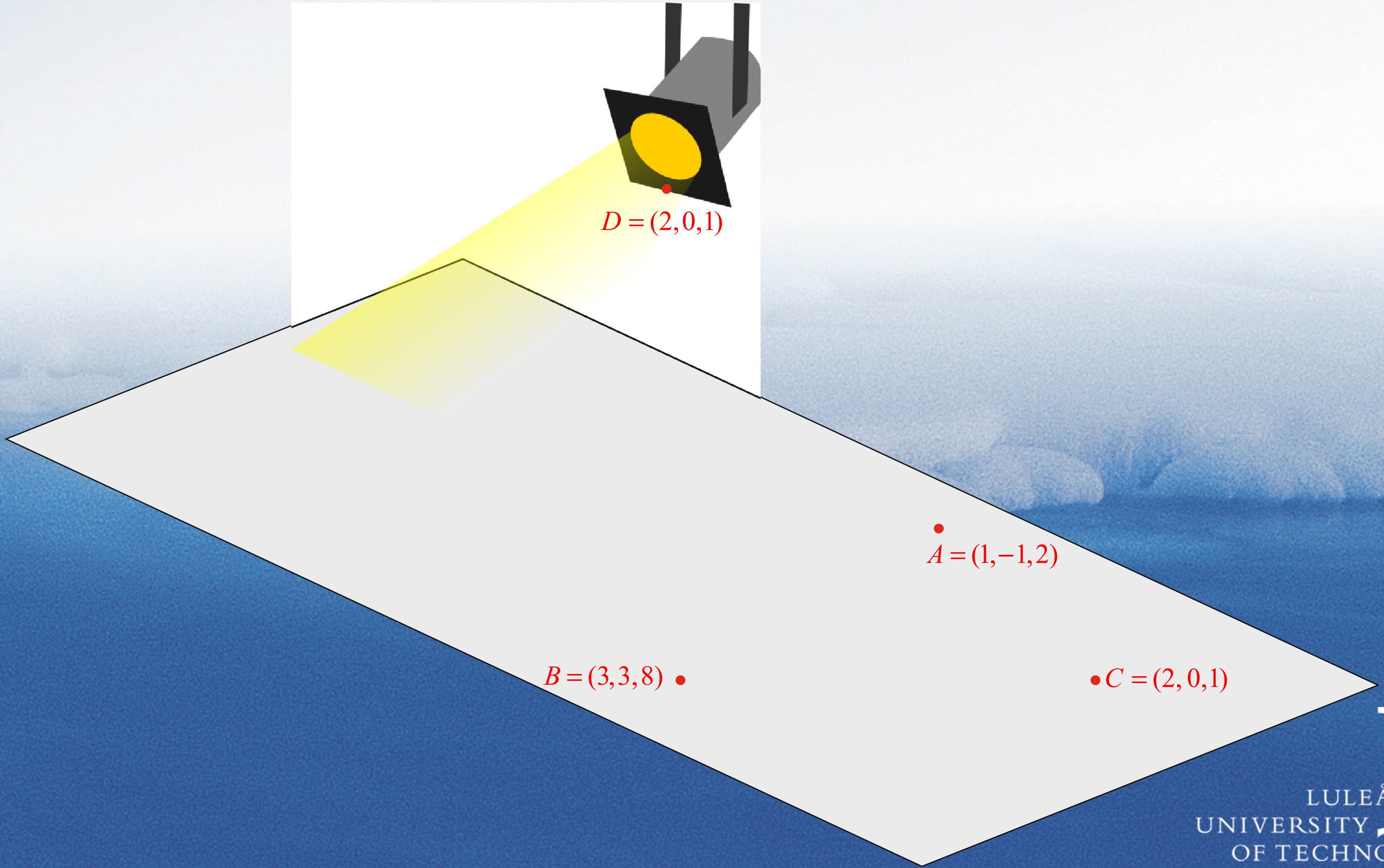
Linjär algebra

Beräkna avstånd och vinklar

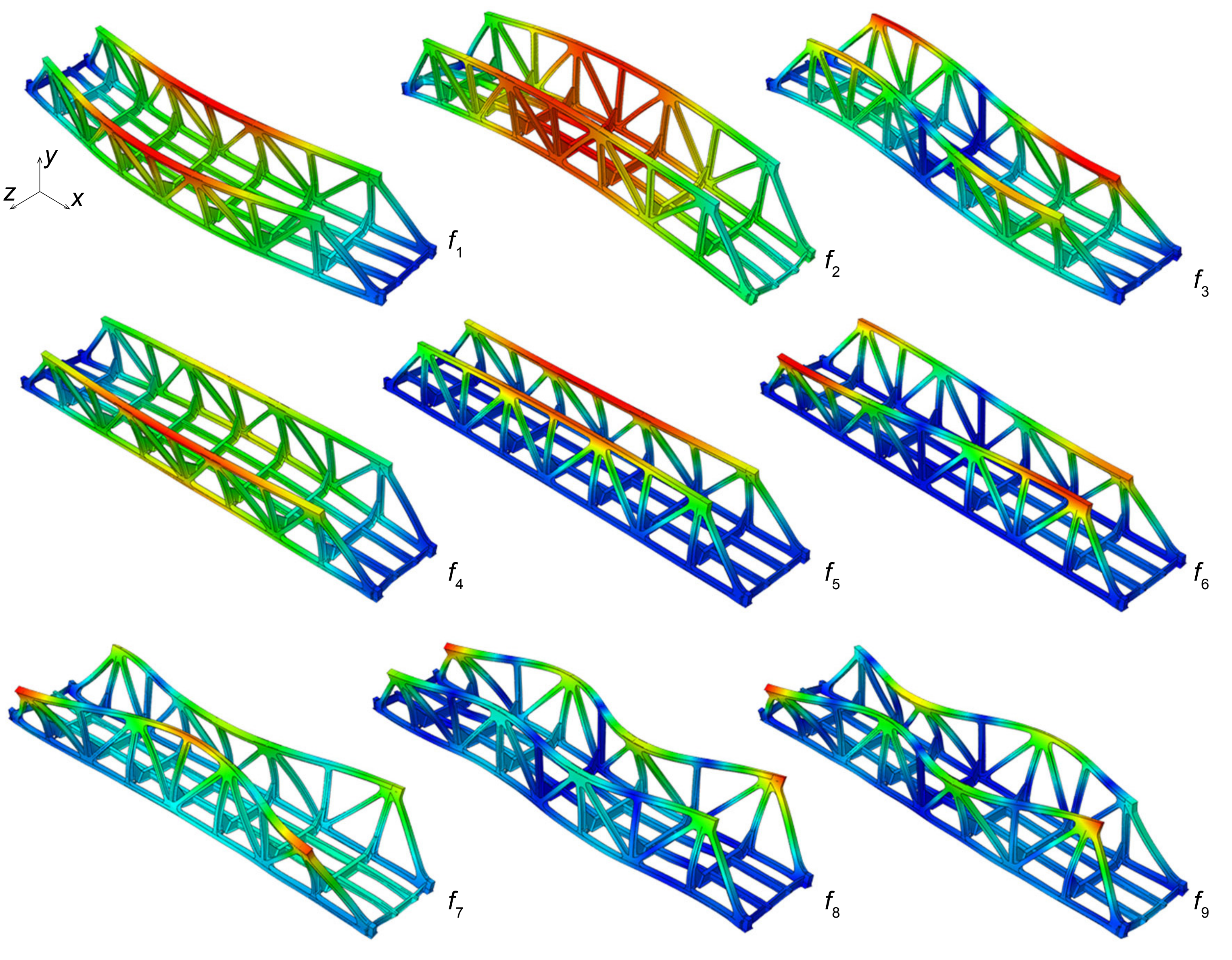


Kortaste avståndet mellan korsande kraftledningar?

Högsta tillåtna höjd på fordon/last?



Läsperiod 3: Egenvektorer



Läsperiod 3: Egenvektorer

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/∼bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

AMS subject classifications. 15-01, 15A18, 15A51

1. Introduction. When Google went online in the late 1990's, one thing that set it apart from other search engines was that its search result listings always seemed deliver the "good stuff" up front. With other search engines you often had to wade through screen after screen of links to irrelevant web pages that just happened to match the search text. Part of the magic behind Google is its PageRank algorithm, which quantitatively rates the importance of each page on the web, allowing Google to rank the pages and thereby present to the user the more important (and typically most relevant and helpful) pages first.

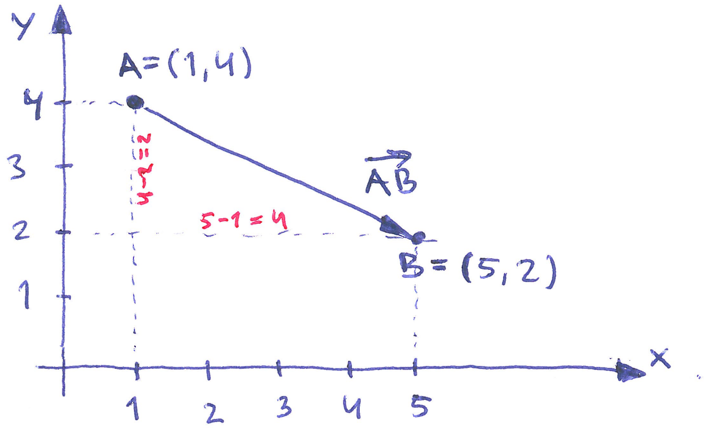
Understanding how to calculate PageRank is essential for anyone designing a web page that they

L1 Vektorer

Verktyg som bland annat gör det enklare att räkna ut olika avstånd, volymer, vinklar m m i 2 och 3 dimensioner.

Mer generellt senare, men i geometri används vektorer för att ange avstånd och riktning mellan två punkter i planet eller rummet.

Exempel



Avståndet mellan A och B fås med pythagoras sats:

$$\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

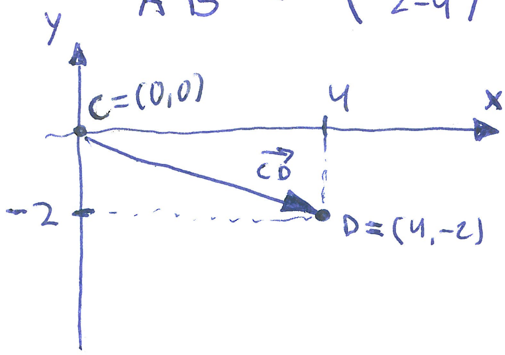
Standardbeteckning för en förflyttning längs en rät linje från A till B är vektorn $\vec{AB}$.

Vi ser i figuren att detta motsvarar att förflytta sig en sträcka $5-1=4$ i x-axelns riktning och en sträcka $2-4=-2$ i y-axelns riktning.

Vanlig beteckning:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Säger inget om start- eller slutpunkt, utan bara hur stor förflyttning och i vilken riktning.



$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2) Allmänt:

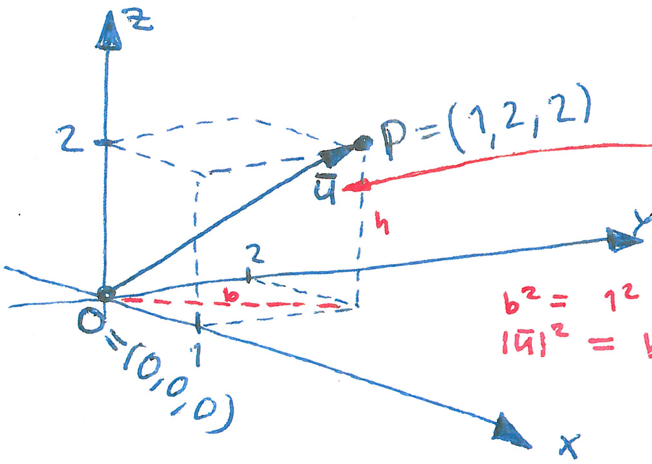
$\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Fetstil i tryckt text

Längd: $\bar{v} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

(Pythagoras)

3 dimensioner



Kallas ibland positronsvektor för P

$b^2 = 1^2 + 2^2$

$|\bar{u}|^2 = b^2 + h^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2$

$\bar{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Längd: $|\bar{u}| = 2^2 + 2^2 + 1^2$

Adams skriver
$\bar{u} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}$
$\bar{v} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k}$

Räkneregler

För vektorer $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

så gäller att $|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

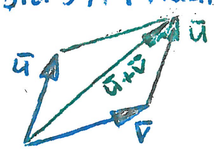
$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$

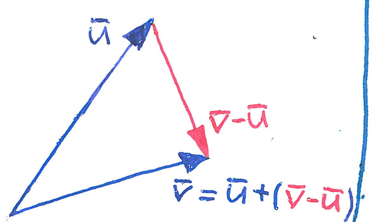
$\bar{u} - \bar{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation med skalär (= vanligt tal)

$t\,\bar{u} = \begin{pmatrix} t u_1 \\ t u_2 \\ t u_3 \end{pmatrix}$

Geometriskt
sid 571 i Adams





Ex:

$$\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = \bar{j} + \bar{k} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

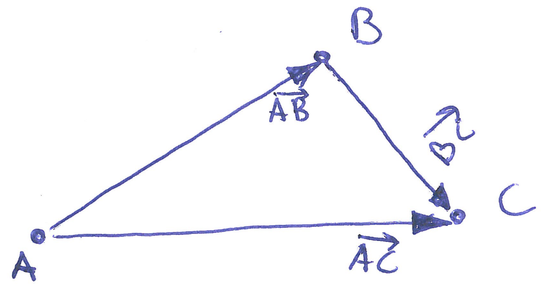
$$\bar{u}+\bar{v} = \begin{pmatrix}1+0\\2+1\\-1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \quad \bar{u}-\bar{v} = \begin{pmatrix}1-0\\2-1\\-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\bar{u}+v| = \sqrt{1^2+3^2+0^2} = \sqrt{10}$$

Ex Visa att triangeln med hörn i $A=(1,-1,2)$ $B=(3,3,8)$ $C=(2,0,1)$ har en rät vinkel. Räkna ut triangelarean.



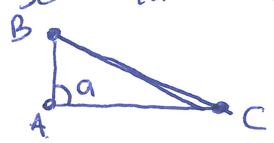
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-7\end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-7)^2} = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$$

Vi ser här att $\underbrace{|\vec{BC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2}_{\text{Pythagoras med } \vec{BC} \text{ som hypotenusa!}}$



Cosinussatsen

$$|\vec{BC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 - 2\underbrace{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|}_{>0}\cdot\underbrace{\cos(a)}_{\substack{\text{Måste vara } =0\\ \text{dvs } a=90^\circ}}, \quad 0\le a\le 180^\circ$$

(4) Arean = $\dfrac{\text{bas} \cdot \text{höjd}}{2} = \dfrac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}|}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{56}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3 \cdot 56}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 56}{4}} = \sqrt{3 \cdot 14} = \sqrt{42}$$

areaenheter

Skalärprodukt (dot product/scalar product/inner product)

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Notera att

$\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$ och

$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$

Även lätt att kolla att

$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

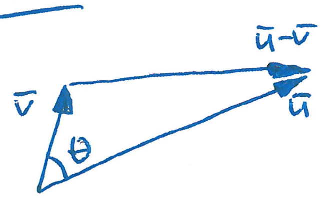
$\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

$(t\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (t\bar{v}) = t(\bar{u} \cdot \bar{v})$

Teorem

Låt θ vara vinkeln mellan två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^3$ (el. $\mathbb{R}^2$), $0 \leq \theta \leq \pi$.
Då är $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \, |\bar{v}| \cos(\theta)$

Bevis



Cosinussatsen:

$$|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cos(\theta) = |\bar{u} - \bar{v}|^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})$$

$$= \bar{u} \cdot (\bar{u} - \bar{v}) - \bar{v} \cdot (\bar{u} - \bar{v}) =$$

$$= \bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v}$$

$$\cancel{|\bar{u}|^2} \cancel{+|\bar{v}|^2} - 2|\bar{u}| \, |\bar{v}| \cos(\theta) = \cancel{|\bar{u}|^2} \cancel{+|\bar{v}|^2} - 2\bar{u} \cdot \bar{v}$$

$$|\bar{u}| \, |\bar{v}| \cos(\theta) = \bar{u} \cdot \bar{v}$$

VSV

(5)

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

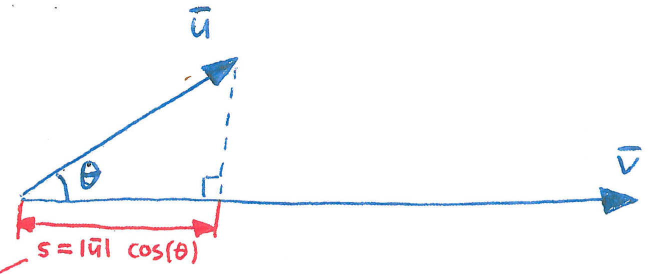
$$\bar{v} = \underbrace{|\bar{v}|}_{\text{längd}} \overbrace{\hat{v}}^{\text{riktning}}$$

Enhets vektor: $\hat{v} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}$ har samma riktning som $\bar{v}$ men längd

= unit vector

$$|\hat{v}| = \sqrt{\left(\frac{v_1}{|\bar{v}|}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{|\bar{v}|}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{|\bar{v}|}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{|\bar{v}|}\right)^2 \cdot (v_1^2+v_2^2+v_3^2)} = \frac{1}{|\bar{v}|} \cdot \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} = \frac{1}{|\bar{v}|} \cdot |\bar{v}| = 1$$



Vi har även visat att
$$\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cos(\theta) \quad (*)$$

Underförstått att θ är minsta mellanliggande vinkel, d v s att $0 \leq \theta \leq \pi$

Skalärprojektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ = "längden på $\bar{u}$s komposant i $\bar{v}$s riktning" =

$$= |\bar{u}| \cos(\theta) = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{|\bar{v}|} = \bar{u} \bullet \left(\frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}\right) = \bar{u} \bullet \hat{v}$$

Vektorprojektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ = vektor med samma riktning som $\bar{v}$ (och $\hat{v}$) och längd samma som skalär projektionen

$$= \underbrace{(\bar{u} \bullet \hat{v})}_{\text{vanligt tal}} \hat{v} = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{|\bar{v}|}\left(\frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}\right) = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{|\bar{v}|^2}\bar{v}$$

I båda fallen enklare formel om man först räknar ut $\hat{v}$ men då måste man komma ihåg att räkna ut $\hat{v}$ först.

Ger dock samma resultat, så smaksak vilken man föredrar att använda.

Exempel

$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skalärprojektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ $= \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{3+4+3}{\sqrt{9+4+1}} = \overbrace{\frac{10}{\sqrt{14}}}^{\text{skalär = vanligt tal!}}$

vektorprojektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ $= \frac{10}{\sqrt{14}}\hat{v} = \frac{10}{\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{9+4+1}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{5}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vektor!}}$

Vad är vinkeln θ mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$? $(0 \leq \theta \leq \pi)$

Det får vi lätt från (*) ovan!

$$\cos(\theta) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} = \frac{3+4+3}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{9+4+1}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$\theta \approx 44{,}4°$

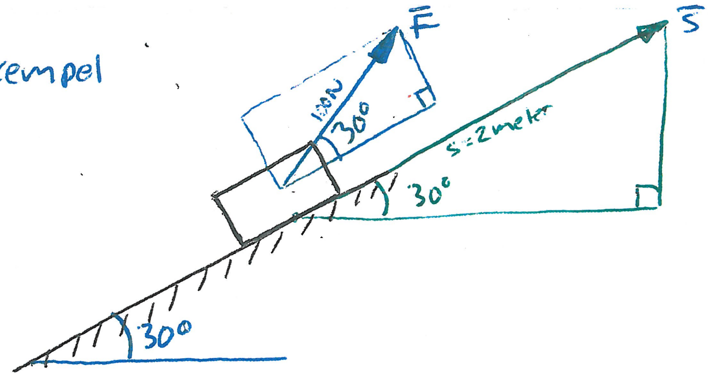
Från (*) fås även att

Använd detta i övningsuppgift 10.2.13

$$\boxed{\bar{u} \text{ och } \bar{v} \text{ vinkelräta (= ortogonala)} \Longleftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \bar{u} \bullet \bar{v} = 0}$$

6

Gymnasieexempel



Not time for this on lecture?

Gymnasie exempel:

Hur mycket energi åtgår för att med kraft 100 N i riktning 60° relativt horisontalplanet dra en massa 2 meter uppför ett lutande plan i vinkel 30° relativt horisontalplanet

Kraftens komposant i rörelseriktningen:

$$F\cdot\cos(30^\circ) = 100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

$$E = \text{kraft}\cdot\text{väg} = 50\sqrt{3}\cdot 2 = 100\sqrt{3} \text{ Joule}$$

Samma!

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 100\cos(60^\circ) \\ 100\sin(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\cdot\frac{1}{2} \\ 100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 50\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} 2\cos(30^\circ) \\ 2\sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}/2 \\ 2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

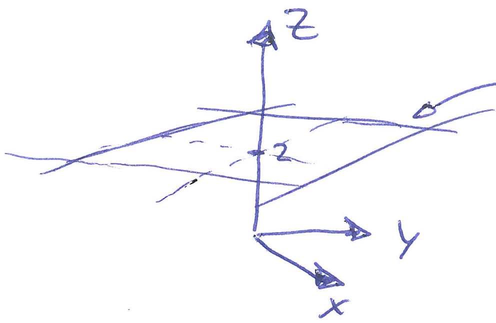
$$\bar{F}\cdot\bar{s} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50\sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 50\sqrt{3} + 50\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$$

Läs själva: Exempel 2 i 10.1

Tolka geometriskt:

a) $z \geq 2$

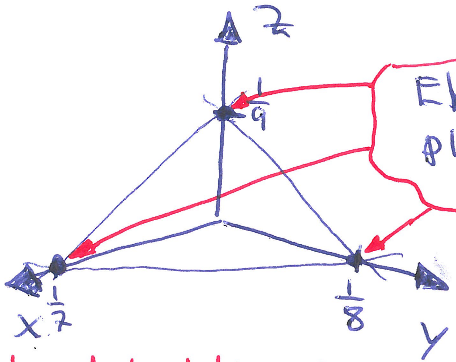
Tolkning: Alla punkter i rummet ($\mathbb{R}^3$) med z-koordinat ≥ 2



Allt "ovanför" eller på detta plan.

b) $7x + 8y + 9z = 1$

Knep: sätt två stycken av x, y, z till 0 så fås skärningen med den tredje axeln



Ekvationen beskriver ett plan genom dessa tre punkter.

Att det blir just ett plan är inte självklart, men ett bevis kommer i avsnitt 10.4.

c) $x + y = 3$

z får vara vad som helst

och $y = 3 - x$

Om $z = 0$ så fås linjen $y = 3 - x$ i x-y-planet. Ett plan genom den linjen och parallellt med z-axeln ger samtliga lösningar.