L2 Vektorprodukt

Definition För vektorer i $\mathbb{R}^3$ definierar vi vektorprodukten

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$

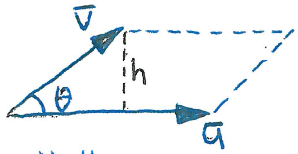
$$\begin{matrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{matrix}$$

Några egenskaper

$$\bar{u}\bullet(\bar{u}\times\bar{v}) = u_1(u_2v_3-u_3v_2)+u_2(u_3v_1-u_1v_3)+u_3(u_1v_2-u_2v_1)$$
$$= \cancel{u_1u_2v_3}-\cancel{u_1u_3v_2}+\cancel{u_2u_3v_1}-\cancel{u_1u_2v_3}+\cancel{u_1u_3v_2}-\cancel{u_2u_3v_1}=0$$

$$\bar{v}\bullet(\bar{u}\times\bar{v}) = v_1(u_2v_3-u_3v_2)+v_2(u_3v_1-u_1v_3)+v_3(u_1v_2-u_2v_1)$$
$$= \cancel{u_2v_1v_3}-\cancel{u_3v_1v_2}+\cancel{u_3v_1v_2}-\cancel{u_1v_2v_3}+\cancel{u_1v_2v_3}-\cancel{u_2v_1v_3}=0$$

$\bar{u}\times\bar{v}$ är alltså vinkelrät mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$



$$A=\text{Parallellogramarean} = |\bar{u}|\cdot h = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\sin(\theta)$$

$$A^2 = |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2\sin^2(\theta) = |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2(1-\cos^2(\theta)) = |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2\cos^2(\theta)$$

$$= |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2 = (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2$$

$$= \cancel{u_1^2v_1^2}+u_1^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_1^2+\cancel{u_2^2v_2^2}+u_2^2v_3^2+u_3^2v_1^2+u_3^2v_2^2+\cancel{u_3^2v_3^2}$$
$$-\cancel{u_1^2v_1^2}-\cancel{u_2^2v_2^2}-\cancel{u_3^2v_3^2}-2u_1v_1u_2v_2-2u_1v_1u_3v_3-2u_2v_2u_3v_3$$

$$= (u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2 = |\bar{u}\times\bar{v}|^2$$

Vi har alltså visat de två första av följande

Viktiga egenskaper för $\bar{u}\times\bar{v}$

i) $\bar{u}\bullet(\bar{u}\times\bar{v}) = \bar{v}\bullet(\bar{u}\times\bar{v}) = 0$

ii) $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\sin(\theta) =$ arean för parallellogrammet med sidor $\bar{u}$ och $\bar{v}$. där $\theta =$ vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$, $0\leq\theta\leq\pi$

iii) $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{u}\times\bar{v}$ är riktade enligt högerhandsregeln, dvs om man riktar tummen i $\bar{u}$s riktning och långfingret i $\bar{v}$s riktning så är $\bar{u}\times\bar{v}$ vinkelrät mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$ och i den riktning som kan anges med långfingret.

(2) Adams försöker motivera egenskapen iii) mitt på sidan 581 med ett argument som inte känns riktigt övertygande, men i) och ii) är hur som helst de viktigaste och vi kan tex enkelt kolla iii) i något specialfall och nöjer oss med det:

Ex: $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0-0\cdot 1\\0\cdot 0-1\cdot 0\\1\cdot 1-0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Ortogonal mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$ samt riktad enligt högerhandsregeln

$$|\bar{u}\times\bar{u}| = |\bar{u}|\cdot|\bar{u}|\underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{u}\times\bar{u} = \bar{0}}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+1\\-1+1\\-1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ (Väntat då $\theta = \pi$ i detta fall)

(i) och (ii) $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{u}\times\bar{v} = -\bar{v}\times\bar{u}}$

Från definitionen av vektorprodukt kan man också visa att

$$\boxed{\begin{aligned}(\bar{u}+\bar{v})\times\bar{w} &= \bar{u}\times\bar{w}+\bar{v}\times\bar{w}\\ \bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w}) &= \bar{u}\times\bar{v}+\bar{u}\times\bar{w}\\ (t\bar{u})\times\bar{v} = \bar{u}\times(t\bar{v}) &= t(\bar{u}\times\bar{v})\end{aligned}}$$

OBS!
I allmänhet så är
$\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w}) \neq (\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$

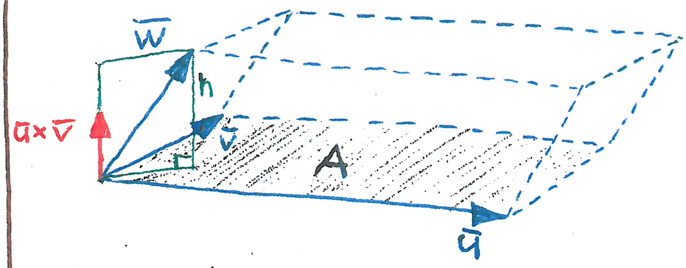
Adams tycker om att skriva vektorer som linjärkombination av enhetsvektorer $\bar{i}$, $\bar{j}$ och $\bar{k}$ i x-, y- och z-axelns riktning i $\mathbb{R}^3$. Motsvarigheten till definitionen högst upp på sid (1) blir då att $\bar{u} = u_1\bar{i}+u_2\bar{j}+u_3\bar{k}$, $\bar{v} = v_1\bar{i}+v_2\bar{j}+v_3\bar{k}$ och man kan skriva $\bar{u}\times\bar{v}$ som "determinanten"

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$

Utveckla längs rad 1.

$$= \bar{i}\,(u_2v_3 - u_3v_2) - \bar{j}\,(u_1v_3 - u_3v_1) + \bar{k}\,(u_1v_2 - u_2v_1)$$

Blir förstås samma resultat, så välj själva vilken notation ni tycker känns smidigast.



En parallellepiped med sidor givna av tre vektorer $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ har volym

$V = |\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})|$

Bevis

Volymen $V =$ bottenytans area multiplicerad med parallellepipedens höjd i en riktning vinkelrät mot bottenytan i figuren ovan.

Men $|\bar{u} \times \bar{v}| =$ bottenytans area i figuren och $\bar{u} \times \bar{v}$ är vinkelrät mot bottenytan, så om vi projicerar $\bar{w}$ på $\bar{u} \times \bar{v}$ så får vi höjden h i figuren.

$$A = |\bar{u} \times \bar{v}|$$

$$h = \left| \frac{\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})}{|\bar{u} \times \bar{v}|} \right|$$

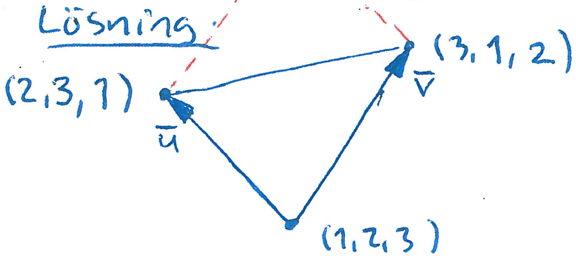
$$V = A\,h = \frac{|\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})|}{\cancel{|\bar{u} \times \bar{v}|}} \cancel{|\bar{u} \times \bar{v}|} = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$$

v.s.v.

Räkneexempel

En triangel har hörn i punkterna $(1,2,3)$, $(3,1,2)$ och $(2,3,1)$. Räkna ut triangelns area.

Lösning:



Två sidor i triangeln ges av vektorerna $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Triangelarean är halva parallellogramarean $|\bar{u} \times \bar{v}|$

$$A = \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1-2 \\ -4+1 \\ -1-2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot 9} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ areaenheter.}$$