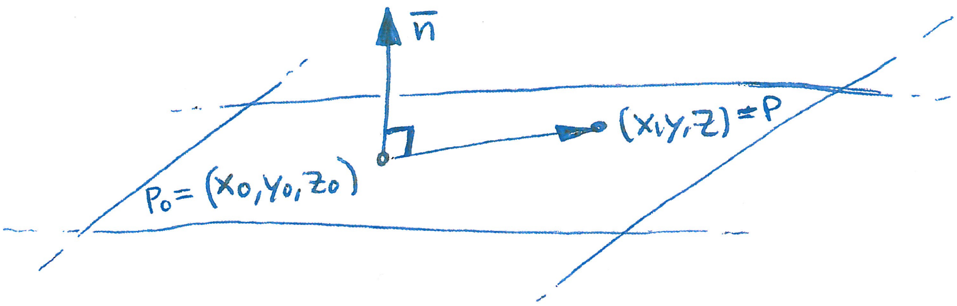
L 3-4 : Linjer och plan

Ekvationen för ett plan

En normalvektor för ett plan P är en vektor $\bar{n}$ som är vinkelrät mot planet.



Om vi vet att ett plan har normalvektor $\bar{n}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$ och innehåller punkten $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ så består planet av alla punkter $P=(x,y,z)$ sådana att vektorn $\overrightarrow{P_0P}$ är vinkelrät (ortogonal) mot $\bar{n}$, dvs sådana att

$$\bar{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

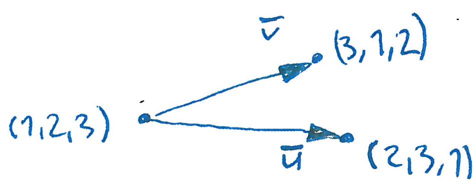
$$\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}=0$$

$\boxed{\text{Planets ekvation: } A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$ För plan genom (x_0,y_0,z_0) med normalvektor $\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$.

Räkneexempel

Finn ekvation för ett plan genom punkterna $(1,2,3)$, $(3,1,2)$ och $(2,3,1)$. Räkna ut kortaste avståndet från punkten $(3,2,1)$ till detta plan.

Lösning



$$\bar{u}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\bar{v}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Normalvektor: $\bar{n}=\bar{u}\times\bar{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2\\-4+1\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$

$\begin{matrix}1 & 2\\1 & -1\end{matrix}$

Punkt i planet: $P_0=(1,2,3)$

Standard beteckning för "vinkelrät mot"

Planet består av alla punkter $P=(x,y,z)$ sådana att $\overrightarrow{P_0P}\perp\bar{n}$

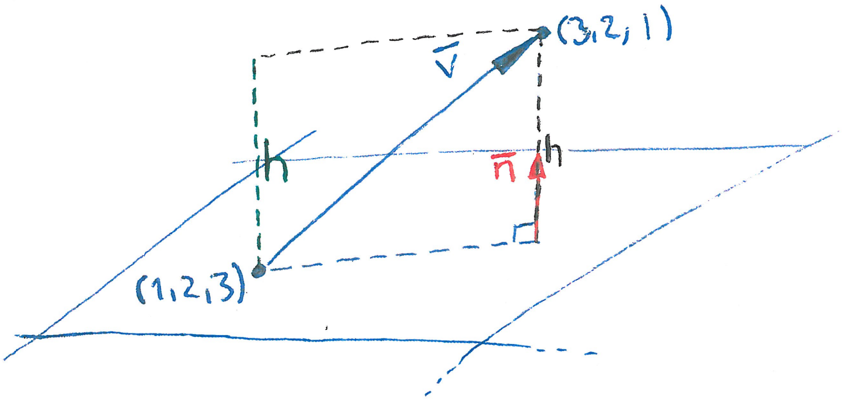
(2) d vs alla punkter sådana att

$$\bar{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3(x-1) - 3(y-2) - 3(z-3) = 0$$

$$\underline{\underline{3(x-1) + 3(y-2) + 3(z-3) = 0}}$$



Kortaste avståndet från punkten (3,2,1) till planet är längs en linje vinkelrät mot planet, d vs höjden h i figuren. Vektorn $\bar{v}$ i figuren är

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{så att}$$

så att h fås genom skalärprojektionen

$$h = \left| \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{-6 + 0 + 6}{\sqrt{9+9+9}} = 0$$

d vs punkten (3, 2, 1) ligger i planet
(kontrolleras lätt genom insättning i planets ekvation).

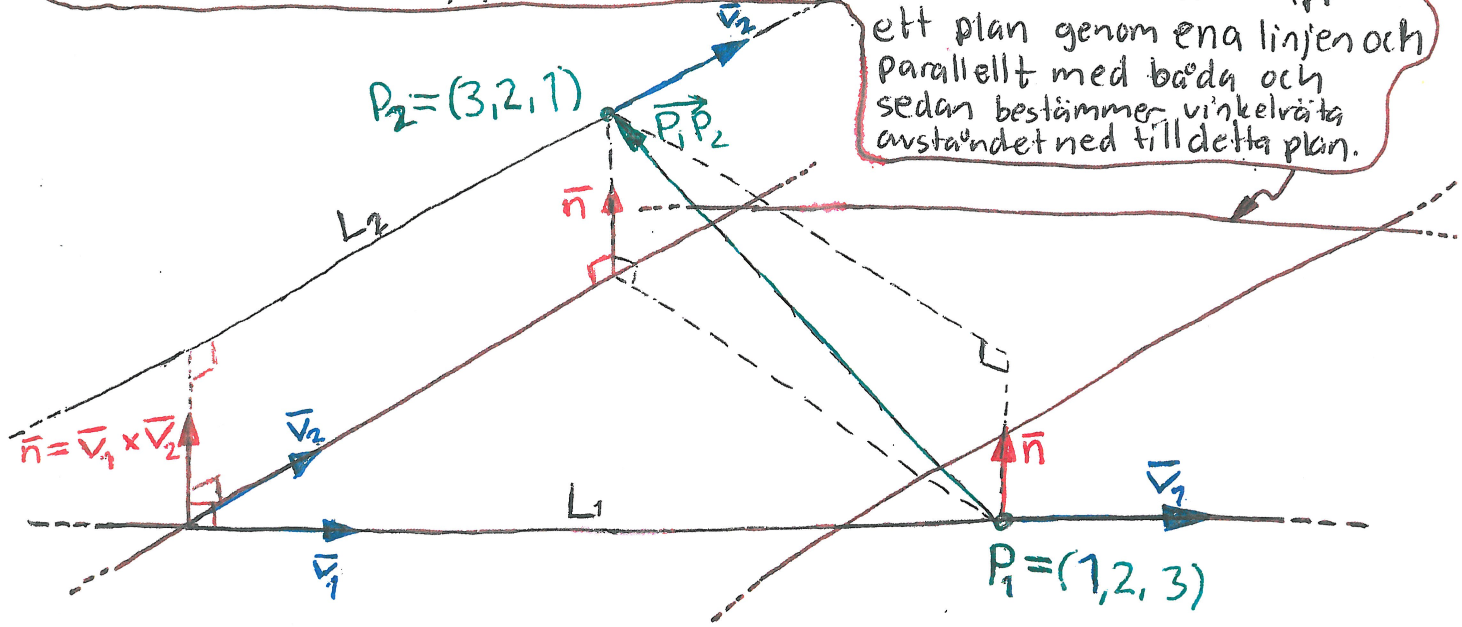
SVAR: $3(x-1) + 3(y-2) + 3(z-3) = 0$
(3,2,1) ligger i planet.

Räkneexempel

Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna

$$L_1: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\bar{u}_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}_{\bar{v}_1} \qquad L_2: \underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}}_{\bar{u}_2} + t\underbrace{\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}}_{\bar{v}_2}$$

Knep:
Lättare få rätsida på såna här problem om man skissar upp ett plan genom ena linjen och parallellt med båda och sedan bestämmer vinkelräta avståndet ned till detta plan.



Normalvektor: $\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-12\\16-4\\6-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Kortaste avståndet mellan L_1 och L_2 kan nu fås genom att räkna ut skalärprojektionen av $\overrightarrow{P_1P_2}$ på normalvektorn $\bar{n}$.

Kortaste avståndet $= \left| \dfrac{\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \left| \dfrac{-12-12+6}{6\sqrt{1^2+2^2+1^2}} \right| = \left| -\dfrac{18}{6\sqrt{6}} \right| = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

Svar: $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ längdenheter

4 Vi har sett att planet genom (x_0, y_0, z_0) med normalvektor $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ har ekvationen

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax + By + Cz = D \quad \text{med } D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Detta kan utnyttjas för att lösa ekvationssystem med två ekvationer och tre obekanta, som t ex

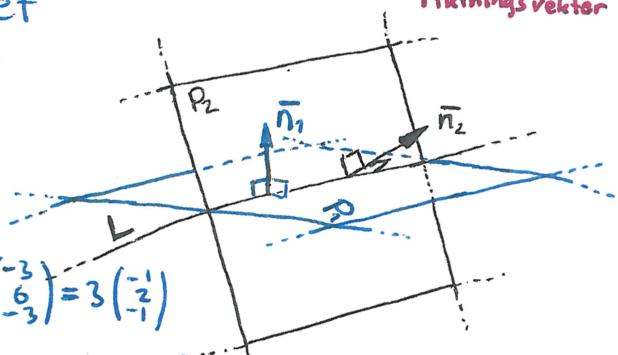
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \longleftarrow P_1 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \longleftarrow P_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Nästa lektion lär vi oss lösa sådana genom Gausseliminering, som ger en fri parameter och lösning på formen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{u} + t\bar{v}$

punkt på linjen

riktningsvektor

Alternativt, se ekvationssystemet som skärningslinjen L mellan två plan P_1 och P_2 med normalvektorer $\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.



För vektorn $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ så gäller att

$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är vinkelrät mot $\bar{n}_1$, så $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är parallell med P_1.
$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är vinkelrät mot $\bar{n}_2$, så $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är parallell med P_2.

Alltså är $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en riktningsvektor för L.

Vi behöver även veta en punkt på linjen, t ex den punkt man får genom att sätta $x = 0$ i $(*)$:

$$\begin{cases} 2y + 3z = 7 \\ 5y + 6z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{array}\right) \underset{2\cdot(2)-5\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -19 \end{array}\right) \overset{(1)+(2)}{\sim} \begin{array}{c} (x \; y) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & -19 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = \frac{19}{3} \end{cases} \Rightarrow P = (0, -6, \tfrac{19}{3}) \text{ punkt på } L$$

Linjens ekvation kan alltså skrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Linjens ekvation

Parameterform: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

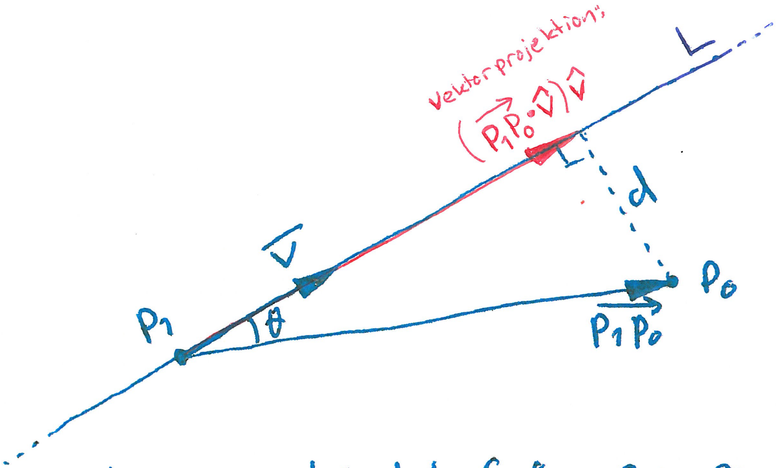
$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

Standardform: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

Avstånd punkt-linje



Alternativ

$d = \left| \vec{P_1P_0} - (\vec{P_1P_0}\cdot\hat{v})\hat{v} \right|$

eller via Pythagoras sats

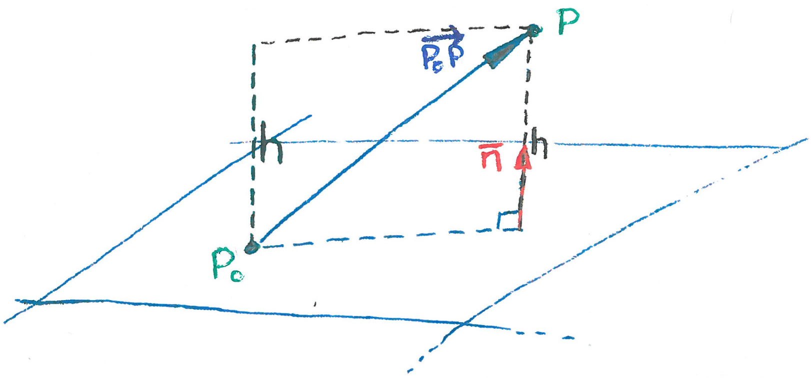
$d = \sqrt{|\vec{P_1P_0}|^2 - |(\vec{P_1P_0}\cdot\hat{v})\hat{v}|^2}$

Kortaste avståndet från en punkt P_0 till linjen L genom P_1 och med riktningsvektor $\vec{v}$ är

$$d = |\vec{P_1P_0}|\sin(\theta) = \frac{|\vec{P_1P_0}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin(\theta)}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{P_1P_0}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

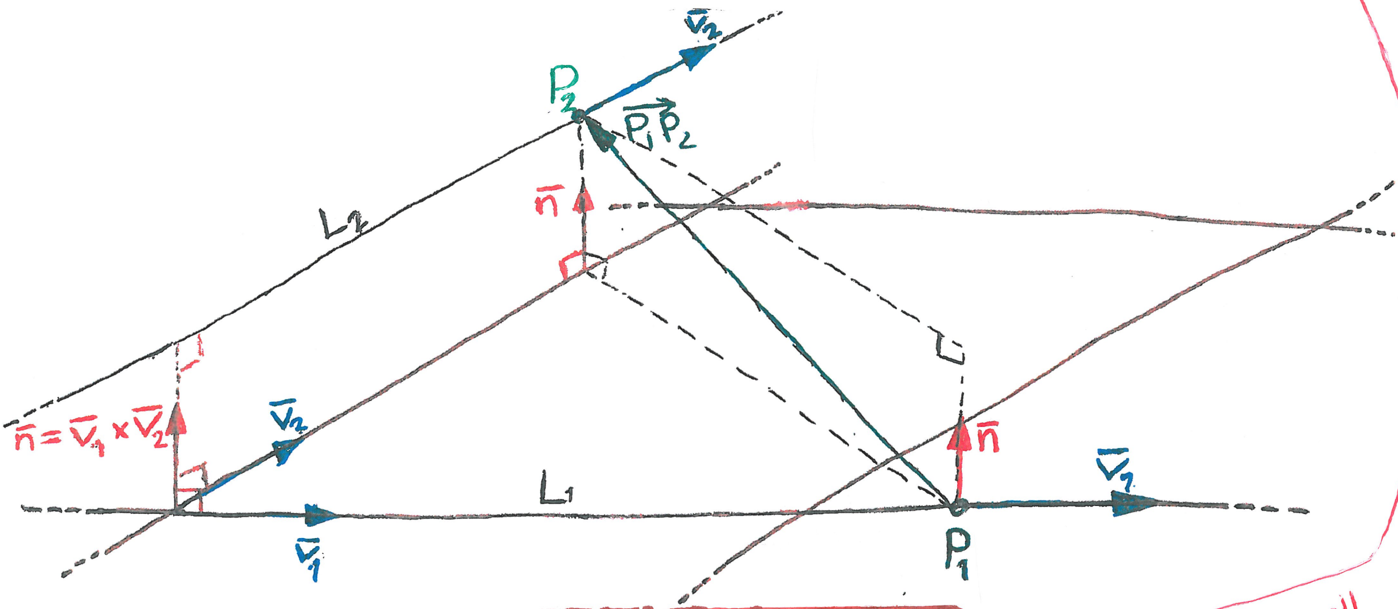
Sammanfattning av avståndsformler för linjer och plan följer på nästa sida.

⑥ Avstånd från punkt till plan



$$h = \left|\frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right|$$

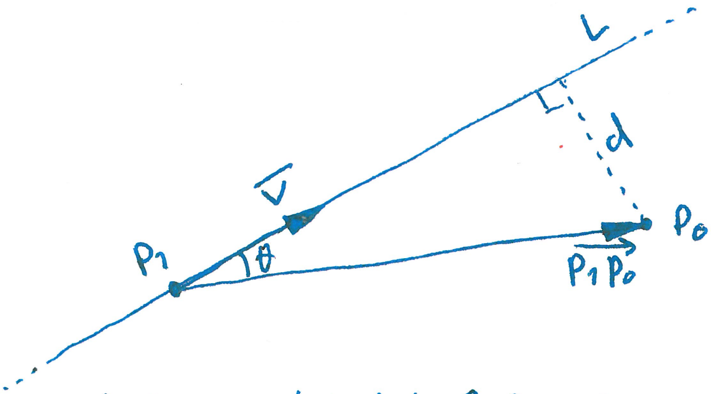
Kortaste avståndet mellan två linjer



$$\text{Kortaste avståndet} = \left|\frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right|$$

OBS! Samma formel!

Avstånd från punkt till linje



Kortaste avståndet från en punkt P_0 till linjen L genom P_1 och med riktningsvektor $\bar{v}$ är

$$d = |\overrightarrow{P_1P_0}| \sin(\theta) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin(\theta)}{|\bar{v}|} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|}$$