L5 Linjära ekvationssystem, Gausselliminering

Linjär ekvation: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_k}_{\text{koefficient}} \underbrace{x_k}_{\text{variabel}} = b$$

Ex: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$

$x + 3y + 5z = 8$

$\sqrt{7}(x_1 + 3(x_2 + 8(x_3 + x_4))) = e^{\sqrt{7}}$

är alla linjära. Den senare kan nämligen skrivas

$\sqrt{7}x_1 + 3\sqrt{7}x_2 + 24\sqrt{7}x_3 + 24\sqrt{7}x_4 = e^{\sqrt{7}}$.

Följande ekvationer är inte linjära:

$3x_1 + 4x_2x_3 = 7$

$x_1 + 2\sqrt{x_2} = 4$

Ett linjärt ekvationssystem är en följd av ekvationer som har gemensamma variabler, t ex

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &= 9, \end{aligned}$$

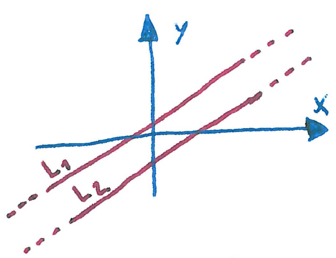
Specialfallet två ekvationer och två obekanta

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Båda kan skrivas på formen $y = kx + m$ och är alltså ekvationer för två stycken linjer L_1 och L_2.

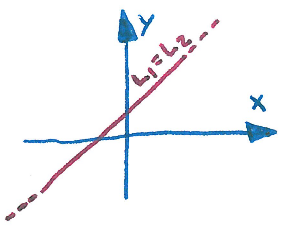
Tre möjligheter:

1) Parallella linjer, ingen skärningspunkt, ingen lösning



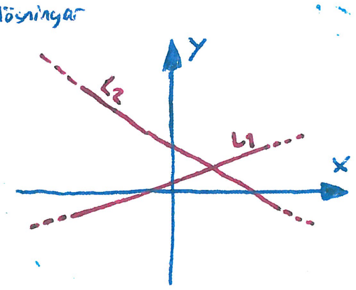
Ingen punkt (x,y) ligger på båda linjerna.

2) $L_1 = L_2$; oändligt många skärningspunkter = lösningar



Varje punkt (x,y) på L_1 ligger även på L_2 och löser alltså båda ekvationerna

3) Exakt en skärningspunkt



Skärningspunkten = den enda punkten som ligger på båda linjerna = den enda lösningen till båda ekvationerna.

2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 & (2) \leftarrow \text{Subtrahera bort } 2\cdot(1) \\ -4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 20 & (3) \leftarrow \text{Addera } 4\cdot(1) \end{cases}$$

Elliminera x_1 från ekvation (2) och (3):

$\Updownarrow$

Elliminera x_2 från ekvation (3):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & (1) \\ -2x_2 - 10x_3 = -16 & (2) \\ 12x_2 + 12x_3 = \underbrace{48}_{3\cdot 16} & (3) \leftarrow \text{Addera } 6\cdot(2) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & (1) \\ -2x_2 - 10x_3 = -16 & (2) \\ -48x_3 = -48 & (3) \end{cases}$$

Triangulär form.

$(3) \Rightarrow \quad x_3 = 1$

$(2) \Rightarrow \quad 2x_2 = -16 + 10x_3 = -16 + 10 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$

$(3) \Rightarrow \quad x_1 = 7 - 2x_2 - x_3 = 7 - 6 - 1 = 7 - 7 = 0$

Alltså en unik lösning: $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1$

Istället för att skriva ut x_1, x_2 och x_3 på varje rad så brukar man göra samma räkneoperationer men enbart skriva ut koefficienter och högerled (= de siffror som ändras):

Metoden kallas Gausselliminering

Ex:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \\ -4x_1 + 4x_2 + Ax_3 = B \end{cases}$$

Systemets utökade matris (augmented matrix) är

$$\begin{array}{c} (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \\ -4 & 4 & A & B \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} (2) - 2\cdot(1) \\ (3) + 4\cdot(1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 12 & A+4 & B+28 \end{array}\right) (3) + 6\cdot(2) \sim$$

koefficienter — högerled

$28 - 96 = -68$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & A-56 & B-68 \end{array}\right)$$

Tillåtna radoperationer i varje steg:
Byt plats på två rader
eller multiplicera med konstant eller
addera konstant · (en rad) till konstant · (annan rad).

Tre olika möjligheter

Specialfall 1: $A = 56,\ B \neq 68$

$$\begin{array}{c} (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & B-68 \end{array}\right) \end{array} \leftarrow \quad 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = B - 68 \neq 0$$

Ingen lösning!

Specialfall 2: $A = 56$, $B = 68$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Vi har då två ekvationer och tre obekanta från ekvation (2) kan vi t ex låta x_3 vara vad som helst,

$x_3 = t$, t något reellt tal (fri variabel)

och sedan från ekvation (2) och (1):

$$-2x_2 - 10x_3 = -16 \iff x_2 = (16 - 10x_3)/2 = 8 - 5t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \iff x_1 = 7 - 2x_2 - x_3 = 7 + 10t - 16 - t = -9 + 9t$$

Oändligt många lösningar: $x_3 = t$ (fri variabel)

$x_2 = 8 - 5t$

$x_1 = -9 + 9t$

skrivs ofta på vektorform $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+9t \\ 8-5t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Enligt räkneregler för vektorer som kommer på nästa lektion

Specialfall 3: $A \neq 56$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & A-56 & B-68 \end{array}\right) \end{array}$$

$$(3) \iff \underbrace{(A-56)}_{\neq 0} x_3 = B - 68 \iff x_3 = \frac{B-68}{A-56}$$

$$(2) \iff -2x_2 - 10x_3 = -16 \iff x_2 = 8 - 5x_3 = 8 - 5\,\frac{B-68}{A-56}$$

$$(1) \iff x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \iff x_1 = -2x_2 - x_3 + 7 = -16 + 10x_3 - x_3 + 7 = -9 + 9\,\frac{B-68}{A-56}$$

Systemets matris är här i trappstegsform. Kan förenklas mer, t ex i fallet $A = 8$ och $B = 20$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & -48 & -48 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (2)/(-2) \\ (3)/48 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)-(3) \\ (2)-(3)\cdot 5 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)-2\cdot(2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

Trappstegsform

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \iff \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Reducerad trappstegsform

Alltså en unik lösning!

④ Ett ekvationssystem kallas <u>lösbart</u> (consistent) om det har minst en lösning.

Exempel 1, sid 13

$$
\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & ■ & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\cancel{0} & ■ & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & ■ & * & * & * & * & * & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & 0 & ■ & * & * & * & * & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & ■ & * & * & * & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ■ & *
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

■ = pivåelement (pivot)
= första nollskilda på varje rad efter förenkling till trappstegsform

Händer aldrig vid ekvationslösning!

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\cancel{0} & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\
\cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & *
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Fri variabel

Ger $x_8 = \ldots$

Fria variabler

Ger $x_5 = \ldots$

Ger $x_4 = \ldots$

Ger $x_3 = \ldots$

Fri variabel

Ger $x_1 = \ldots$