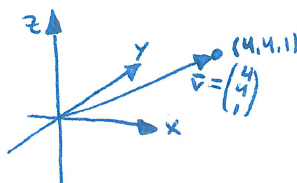
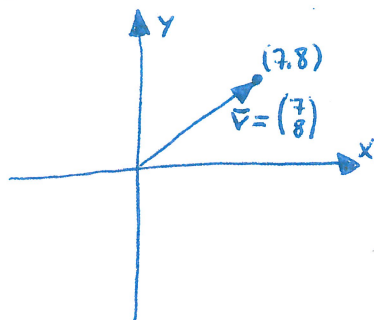


L6 Vektor- och matrisekvationer

1

Matriser med bara en kolumn kallas vektorer, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Specialfallen $n=2$ och $n=3$ kan tolkas som
positionsvektor för en punkt i planet resp. rummet.



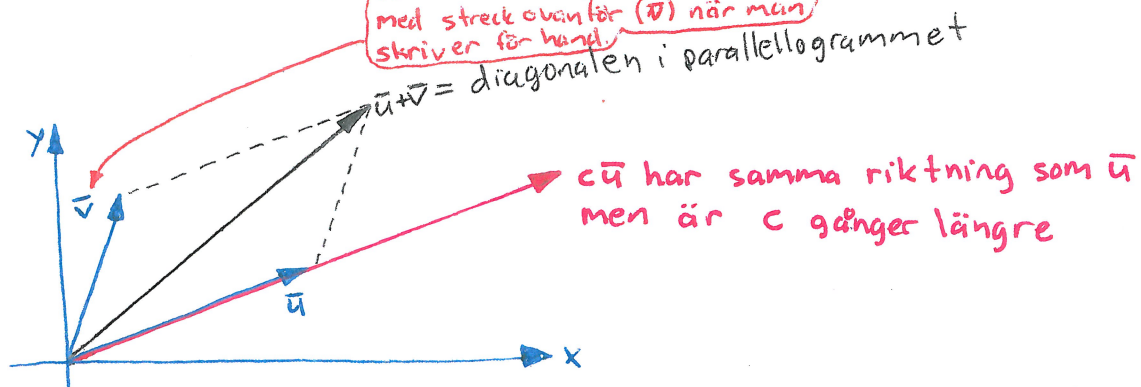
Vektorer har en storlek och en riktning (motsvarar
t.ex. en förflyttning 7 i x-led och 8 i y-led i första exemplet
ovan). Storleken = "längden på pilen" = $\sqrt{7^2 + 8^2}$ (pythagoras).

Addition:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation med skalär (scalar) : $c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}$
= vanligt reellt tal

Geometrisk tolkning:

Att något är en vektor
anges ofta genom att använda
fetstil (**u**) i tryckt text, eller
med streck över för (u) när man
skriver för hand.



Ger räkneregler som för vanliga tal (t.ex. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$), se blå ruta sid 27 i boken.

② En linjärkombination av vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ är en summa av typen $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_p\vec{v}_p$, c_i skalärer.

Vanlig fråga: Kan en vektor \vec{u} skrivas som linjärkombination av vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$?

Ex: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Finns skalärer c_1, c_2 sådana att

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \vec{u} \quad ?$$

\Leftrightarrow

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 + 5c_2 \\ -5c_1 + 6c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Notera att detta är ekvations-systemet
 $\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ -2c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = -3 \end{cases}$
 på matrisform.

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & | & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 7 \\ -2 & 5 & | & 4 \\ -5 & 6 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+2 \cdot (1), (3)+5 \cdot (1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 9 & | & 18 \\ 0 & 16 & | & 32 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9} \cdot (2), \frac{1}{16} \cdot (3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-2 \cdot (2)} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & | & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså finns exakt en lösning: $c_2 = 2, c_1 = 7 - 2c_2 = 7 - 4 = 3$

Allmänt: Ekvationen $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$ har samma lösning(ar) (ingen, en eller oändligt många) som ekvationssystemet med utvidgad matris
 $(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n | \vec{b})$

Ex: Lös $a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Skrivet på matrisform blir detta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{byt rad 1 och 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & | & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{/3 \text{ rad 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

d fri variabel; $d = t, t \in \mathbb{R}$

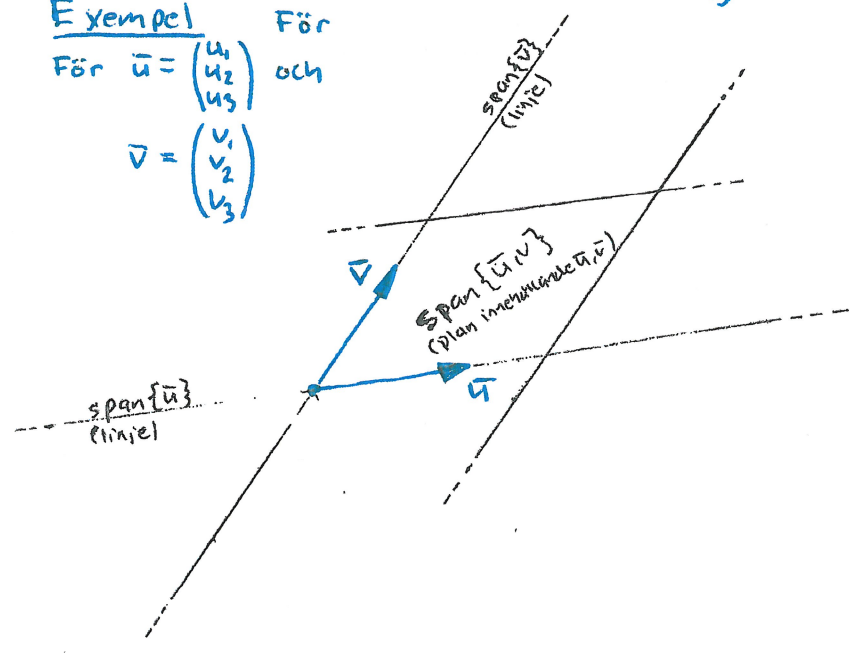
$$\left. \begin{aligned} (3) &\Rightarrow c = 3 - 2d = 3 - 2t \\ (2) &\Rightarrow b = 6 - 2c = 6 - 6 + 4t = 4t \\ (1) &\Rightarrow a = 7 - 2d = 7 - 2t \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2t \\ 4t \\ 3-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ kallas linjära höljiet till $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, eller på Engelska, $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$

Exempel För

För $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ och

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation av matris och vektor

För en matris A med kolumnvektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

och för en vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ så definieras produkten

$$A\vec{x} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 + \dots + x_n \vec{a}_n. (*)$$

Matrisekvationen $A\vec{x} = \vec{b}$ är alltså samma som vektorekvationen $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$
Från motsvarande räkneregler för vektorer och skalärer (sid 27)

fås att $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$ och $A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$

Theorem 4

Följer även att följande påståenden är ekvivalenta (dvs antingen är alla sanna eller så är alla falska):

- (a) Varje \vec{b} i \mathbb{R}^m kan skrivas som en linjärkombination av kolumnvektorer i A .
- (b) För varje \vec{b} i \mathbb{R}^m har ekvationen $A\vec{x} = \vec{b}$ minst en lösning.
- (c) A omskriven i trappstegsform med Gausseliminering har ett pivotelement på varje rad.

När dessa är sanna säger man att kolumnvektorer i A spänner upp \mathbb{R}^m .

(4)

BevisAtt $(a) \Leftrightarrow (b)$ följer direkt ur $(*)$.Återstår att visa att $(b) \Leftrightarrow (c)$, dvs att $(c) \text{ sant} \Rightarrow (b) \text{ sant}$ och att $(c) \text{ falskt} \Rightarrow (b) \text{ falskt}$ 1: Antag att (c) är sant och applicera radoperationer på $[A \ \bar{b}]$ för godtyckligt \bar{b} så att

$$[A \ \bar{b}] \sim [T \ \bar{a}]$$

där T är på trappstegsform med nollskilt ^{pivå-}element på varje rad. Då finns minst en lösning, ty enda möjligheten att inte få någon lösning är om sista raden blir på formen $0 = d_n \neq 0$.2: Omvänt, antag att (c) är falskt och T som ovan.Då är $[T \ | \ \bar{1}]$ ett icke lösbart system, ty T har inget nollskilt element på sista raden.

Eftersom radoperationer är inverterbara (se sid 6) så kan systemet skrivas om som

$$[T \ | \ \bar{1}] \sim [A \ | \ \bar{b}] \text{ för } n$$

för någon vektor \bar{b} sådan att $A\bar{x} = \bar{b}$

ej är lösbar.

K.S.V.

Teorem 4 i praktikenGrundfrågan där är om varje $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ kan skrivas

$$\bar{b} = \overbrace{A\bar{x}}^{\text{Matrisekvation}} = \underbrace{x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n}_{\text{vektorekvation.}}$$

Två sätt att skriva samma sak.

Vill man undersöka detta så Gausseliminera man:

$$(A \ | \ \bar{b}) \sim \dots \sim (T \ | \ \bar{z})$$

Matris på trappstegsform

Nytt högerled

Enda sättet som det kan skita sig så att ingen lösning finns är om sista raden i T bara innehåller nollor (= inget pivåelement), för då finns det \bar{b} som efter Gausseliminering ger en sista rad $0 = (\text{nånting nollskilt})$, (Men formellt bevis ovan och i läroboken.)

1.4.18 Spänner kolumnvektorer i följande matris upp \mathbb{R}^4 ? (5)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4) - 2 \cdot (1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) - 2 \cdot (2) \\ (4) - (2)}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{15 \cdot (4) + 7 \cdot (3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eller $(4) + \frac{15}{7}(3)$

Bara nollor på sista raden (= inget pivot element). Alltså finns $\bar{u} \in \mathbb{R}^4$ så att $B\bar{x} = \bar{u}$ saknar lösning, dvs kolumnvektorer i B spänner inte upp \mathbb{R}^4 .

(Eftersom kolumnvektorer har 4 element så ligger varje linjärkombination av dem i \mathbb{R}^4 , så ingen vektor i \mathbb{R}^3 kan skrivas som sådan linjärkombination.)

Notera att om tex

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = (\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}) \text{ och } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

så är

$$A\bar{x} = [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] \bar{x} = [x_1 \bar{a} + x_2 \bar{b} + x_3 \bar{c}] = \left[x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a_1 + x_2 b_1 + x_3 c_1 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 + x_3 c_2 \\ x_1 a_3 + x_2 b_3 + x_3 c_3 \end{bmatrix}$$

Allmänt gäller (oavsett storlek på matrisen A) att

rad nummer k i $A\bar{x}$ är summan av produkter av motsvarande element från rad k i A och från \bar{x} ,