L7&9 Lösningsmängd till linjära ekvationssystem

Vi har sett exempel på linjära ekvations-system med 0, 1 resp oändligt många lösningar.
Är det enda möjligheterna? Svar: Ja!

Teorem Ett linjärt ekvationssystem har antingen 0, 1 eller oändligt många lösningar.

Bevis: Antag att det finns mer än en lösning, och välj två olika x_1, x_2 som löser ekvationssystemet, och skriv det på matris form

$$A\bar{x}_1 = \bar{b} \quad \text{och} \quad A\bar{x}_2 = \bar{b}, \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2.$$

$\bar{0}$ = en vektor med bara nollor.

Sätt $\bar{x}_0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \neq \bar{0}$. Då är $A\bar{x}_0 = A(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \bar{0}$.

Alltså är $A(\bar{x}_1 + t\bar{x}_0) = \underbrace{A\bar{x}_1}_{\bar{b}} + t\underbrace{A\bar{x}_0}_{0} = \bar{b}$ för alla $t \in \mathbb{R}$,
så det finns oändligt många lösningar $\bar{x}_1 + t\bar{x}_0$.

V.S.V.

Ett linjärt ekvationssystem kallas homogent om det kan skrivas som en matrisekvation $A\bar{x} = \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Det finns alltid minst en lösning, den så kallade triviala lösningen $\bar{x} = 0$

Teorem
Ett ekvationssystem skrivet som matrisekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ har antingen ingen lösning eller lika många lösningar som $A\bar{x} = \bar{0}$.

Bevis:
Klart om $A\bar{x} = \bar{b}$ saknar lösning.
Antag att det finns något $\bar{u}$ sådant att $A\bar{u} = \bar{b}$.
För varje lösning $\bar{v}$ till $A\bar{v} = \bar{0}$ gäller då att

$$A(\bar{u} + \bar{v}) = A\bar{u} + A\bar{v} = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b}.$$

Alltså finns det en lösning $\bar{x} = \bar{u} + \bar{v}$ till $A\bar{x} = \bar{b}$ för varje lösning $\bar{v}$ till $A\bar{v} = \bar{0}$.

Detta ger alla lösningar, eftersom varje lösning $\bar{x}$ till $A\bar{x} = \bar{b}$ kan skrivas $\bar{x} = \bar{u} + (\bar{x} - \bar{u})$ där $A(\bar{x} - \bar{u}) = A\bar{x} - A\bar{u} = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$.

VSV

②

Ex:

$$A\bar{v}=\bar{b}, \quad A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 6 & -4\end{pmatrix}, \quad \bar{b}=\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & P\\ -2 & 6 & -4 & Q\end{array}\right)_{(2)+2\cdot(1)} \sim \begin{array}{c}(v_1 \quad v_2 \quad v_3)\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & P\\ 0 & 0 & 0 & Q+2P\end{array}\right)\end{array}$$

Lösning finns om $\underline{Q=-2P}$. Vi kan då låta v_2 och v_3 vara fria variabler: $v_2=s$, $v_3=t$, $s,t\in\mathbb{R}$

$$v_1-3v_2+2v_3=P$$

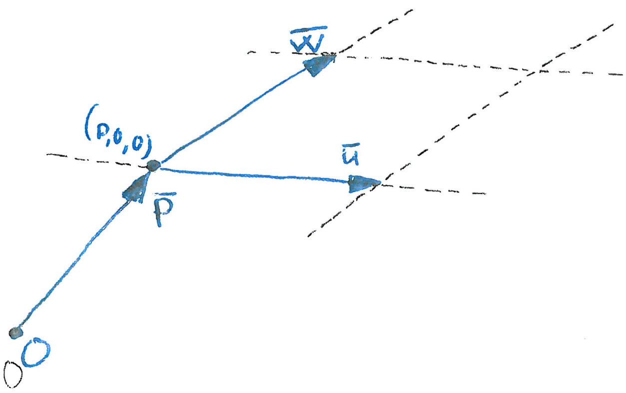
$$v_1=3v_2-2v_3+P=3s-2t+P$$

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P+3s-2t\\ s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}3s\\ s\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2t\\ 0\\ t\end{pmatrix}}_{\text{En separat vektor för varje fri variabel}}$$

$$=\begin{pmatrix}P\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\underbrace{s\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{\substack{=\text{ samtliga lösningar}\\ \text{i specialfallet } P=Q=0,\\ \text{dvs samtliga lösningar}\\ \text{till } A\bar{v}=\bar{0}}}, \quad s,t\in\mathbb{R}$$

Samtliga lösningar skrivna på parameterform.

$\bar{v}$ $\bar{p}+s\bar{u}+t\bar{w}$, $\quad \bar{p}=\begin{pmatrix}P\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $\bar{u}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $\cancel{\bar{w}}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$



Lösningsmängden är det plan som innehåller punkten (P,0,0) (positionsvektor $\bar{p}$) och är parallellt med vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{w}$

Uppg. 1.5.14

Givet: $x_1 = 5x_4$

$x_2 = 3 - 2x_4$

$x_3 = 2 + 5x_4$

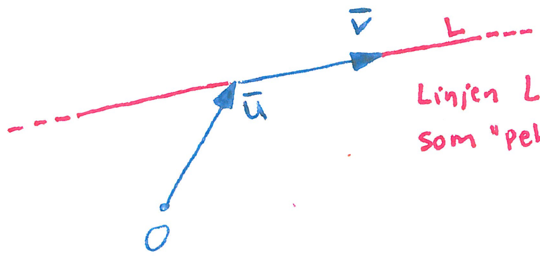
x_4 fri variabel

Använd vektorer för att skriva lösningarna som en "linje" i $\mathbb{R}^4$.

Med $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$ så är

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_4 \\ 3-2x_4 \\ 2+5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 3-2t \\ 2+5t \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{u}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}}$$

Detta kan tolkas som en linje

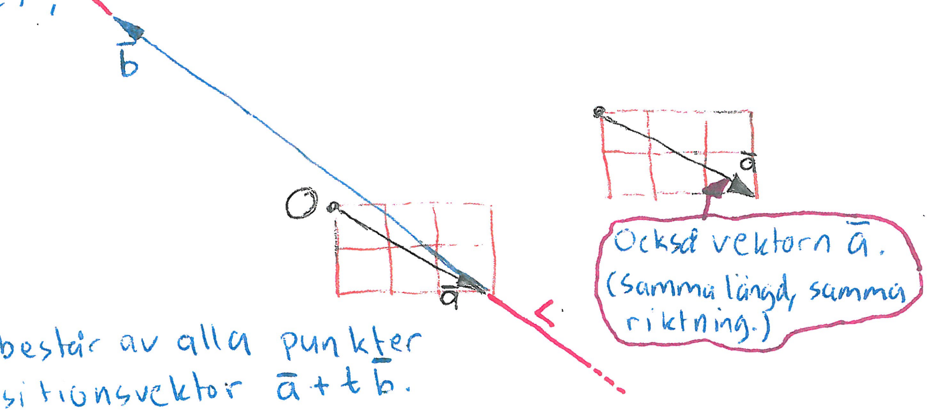


Linjen L = mängden av alla punkter som "pekas ut" av $\bar{u} + t\bar{v}$ för något $t \in \mathbb{R}$.

Uppg 1.5.20

Ange parametrisk ekvation för en linje genom punkten med positionsvektor $\bar{a}$ och parallell med vektorn $\bar{b}$.

$\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$



Svar: Linjen består av alla punkter med positionsvektor $\bar{a} + t\bar{b}$.

Ordet positionsvektor ovan anger att vektorn anger riktning och avstånd från origo till en punkt i $\mathbb{R}^n$.

Kom ihåg att en vektor är något som har en storlek och en riktning. Den har ingen bestämd position i rummet eller planet. Vektorn $\bar{v}$ ovan är tex placerad med "startpunkt" vid "spetsen" för vektorn $\bar{u}$, men är fortfarande samma vektor $\bar{v}$ om startpunkten flyttas, tex till O.