

L10-11 Linjärt beroende, linjära avbildningar

①

Man säger att en mängd vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ är linjärt beroende om det finns c_1, c_2, \dots, c_n (minst en nollskild) sådana att

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

(Innebär alltså att en vektor kan flyttas över till högerledet och skrivas som linjärkombination av de övriga.)

Vektorerna kallas linjärt oberoende om den homogena ekvationen

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

enbart har triviala lösningen $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Ex: Uppgift 1.7.10 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ h \end{pmatrix}$
 a) För vilka värden på h ligger \vec{v}_3 i span $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?
 b) För vilka värden på h är $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linjärt beroende?

a) För vilka h finns en lösning till ekvationen $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \vec{v}_3$?
 Ekvationen skriven på matrisform är

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -5 \\ -5 & 15 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+3 \cdot (-1), (3)+5 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10+h \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(10+h) \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SVAR: Inte för något h .

b) För vilka h finns minst en icke-trivial lösning till vektor ekvationen $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$?

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -5 \\ 5 & 15 & h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SVAR: c_2 fri variabel \Rightarrow oändligt många lösningar \Rightarrow linjärt beroende för alla h !

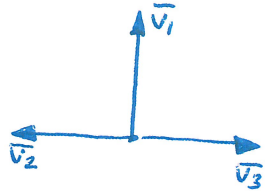
Ex: Om $A\vec{x} = \vec{0}$ enbart har triviala lösningar så är kolumnerna i A linjärt oberoende.
 Om $A\vec{x} = \vec{0}$ har en icke-trivial lösning så är kolumnerna i A linjärt beroende.

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(5) \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+2 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Tre pivot element \Rightarrow inga fria variabler och unik lösning \Rightarrow linjärt oberoende kolumner.

Ex: $\{\vec{0}\}$ linjärt beroende, ty $c_1 \vec{0} = \vec{0}$ för varje $c_1 \in \mathbb{R}$.
 för $\vec{v} \neq \vec{0}$ så är $c_1 \vec{v} = \vec{0}$ enbart för $c_1 = 0$, så $\{\vec{v}\}$ är linjärt oberoende.
 Om $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ och $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ så är $c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2 = \vec{0}$ om $c=d=0$ eller om $d \neq 0$ och $\vec{v}_2 = -\frac{c}{d}\vec{v}_1$.
 $\{\vec{0}, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_m\}$ linjärt beroende, ty $0 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_m = \vec{0}$.

② Ex: 3 vektorer i \mathbb{R}^2 : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ så $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ är linjärt beroende
och $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ är linjärt beroende

\vec{v}_2 kan skrivas som linjärkombination av \vec{v}_1 och \vec{v}_3 ($\vec{v}_2 = -\vec{v}_3 + 0\vec{v}_1$)
 \vec{v}_3 kan skrivas som linjärkombination av \vec{v}_1 och \vec{v}_2 .

\vec{v}_1 kan inte skrivas som linjärkombination av \vec{v}_2 och \vec{v}_3 .

Teorem 8

Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ är vektorer i \mathbb{R}^n och $m > n$ så är vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ linjärt beroende.

Beris

Bilda $n \times m$ -matrisen $A = \underbrace{(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_m)}_{m \text{ kolumner}} \}$ n rader.

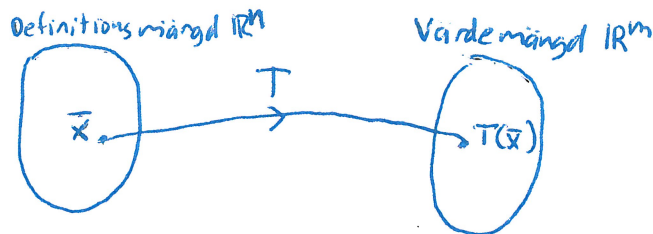
Gausseliminering ger att $[A | \vec{0}]$ har maximalt ett pivåelement per rad, men A har fler kolumner än rader, så minst en kolumn saknar pivåelement och ger en fri variabel och oändligt många lösningar. Alltså finns icke-trivial lösning och vektorerna är linjärt beroende. VSU

Exempel

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ är linjärt beroende.

Linjära avbildningar

En avbildning (eller funktion) T från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m är en regel som parar ihop varje vektor \bar{x} i \mathbb{R}^n med en vektor $T(\bar{x})$ i \mathbb{R}^m .



Avbildningen T sägs vara linjär om det gäller för alla \bar{u}, \bar{v} i \mathbb{R}^n och alla skalären c_1, c_2 att

$$T(c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2) = c_1 T(\bar{u}_1) + c_2 T(\bar{u}_2).$$

Matrisavbildningar

För varje $n \times m$ -matris A så kan vi definiera avbildningen $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$. Från räknereglerna för matris-vektormultiplikationer (sid 39 i boken) har vi att

$$A(c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2) = A(c_1\bar{u}_1) + A(c_2\bar{u}_2) = c_1 A\bar{u}_1 + c_2 A\bar{u}_2.$$

Ex (Uppg 1.8.2)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A\bar{u} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a + 0 + 0 \\ 0 + \frac{1}{3}b + 0 \\ 0 + 0 + \frac{1}{3}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/3 \\ b/3 \\ c/3 \end{pmatrix}$$

$$A(c_1\bar{u} + c_2\bar{v}) = A \begin{pmatrix} 3c_1 + ac_2 \\ 6c_1 + bc_2 \\ 9c_1 + cc_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(3c_1 + ac_2) \\ \frac{1}{3}(6c_1 + bc_2) \\ \frac{1}{3}(9c_1 + cc_2) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a/3 \\ b/3 \\ c/3 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 A\bar{u} + c_2 A\bar{v}$$

Ex (Uppg. 1.8.4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

För $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, finn \vec{x} sådan att $T(\vec{x}) = \vec{b}$. Är \vec{x} unik?

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & 1 & -3 & | & -4 \\ 2 & -5 & 6 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & 1 & -3 & | & -4 \\ 0 & -1 & 0 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot(-1) \\ (3)+(2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{/(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)-3(3)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -17 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

SVAR: $T \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$
 Unik lösning.

Kontroll:
 $T \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 + 14 - 3 \\ 0 - 7 + 3 \\ -34 + 35 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Ex 2 sid 65

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

projektion på x_1, x_2 -planet

