L13 Matrisräkneregler. Inversa matriser

Multiplikation av matris med skalär samt addition av matriser av samma storlek definieras på samma sätt som för vektorer.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Summera elementvis

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{rad } j \end{array} \begin{array}{c} \text{kolumn } k \\ \begin{pmatrix} \\ a_{jk} \\ \\ \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{kolumn } k \\ \begin{pmatrix} \\ b_{jk} \\ \\ \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{kolumn } k \\ \begin{pmatrix} \\ a_{jk} + b_{jk} \\ \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

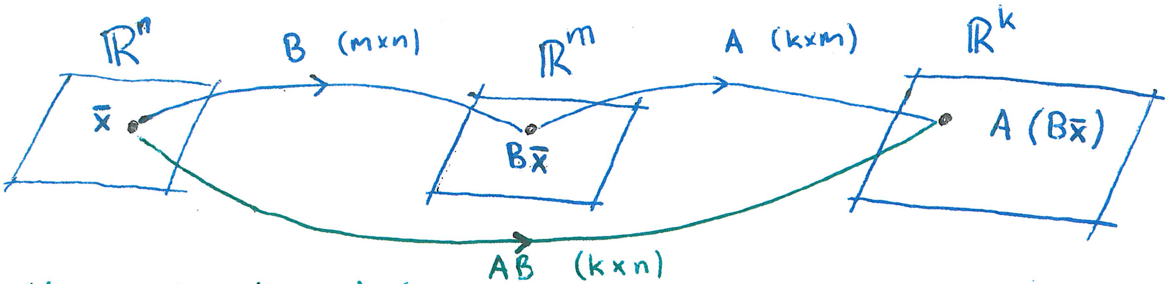
$A + C$ ej definierad, ty C och A har olika storlek.

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 10 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Räkneregler: Teorem 1

$A + B = B + A$	$r(A+B) = rA + rB$
$(A+B) + C = A + (B+C)$	$(r+s)A = rA + sA$
$A + 0 = A$	$r(sA) = (rs)A$

Nollmatris. Samma antal rader och kolumner som A, men bara nollor.



Vi skulle vilja definiera multiplikation av matriserna A och B så att $(AB)\bar{x} = A(B\bar{x})$ för alla $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^M$.

$A(B\bar{x}) = A(x_1\bar{b}_1 + \dots + x_n \bar{b}_n)$, $B = [\bar{b}_1 \cdots \bar{b}_n]$ $m \times n$-matris

$k \times m$-matris

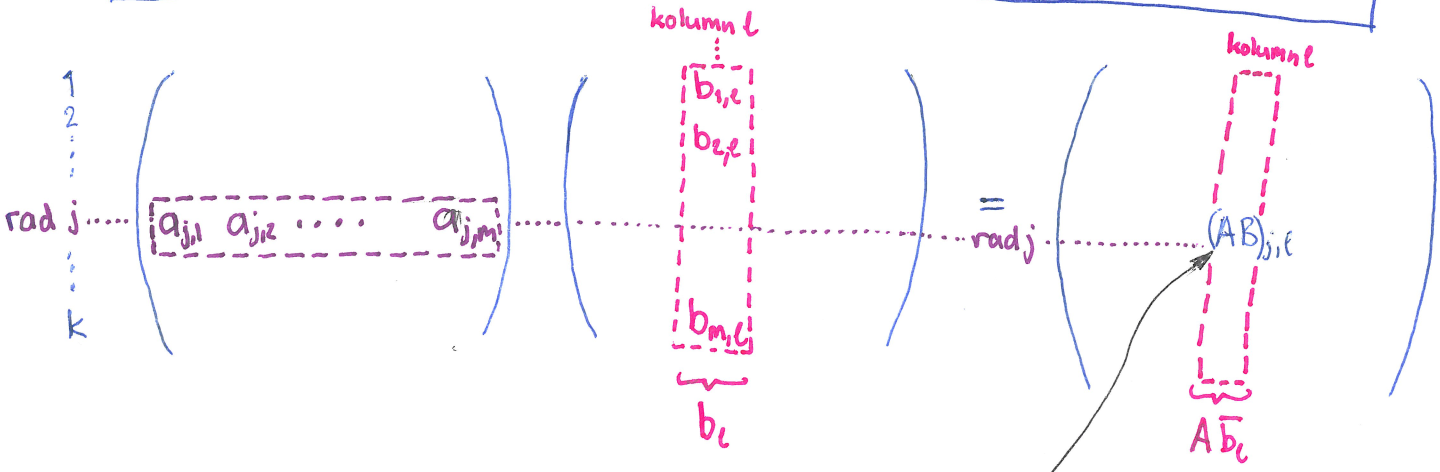
$$A(B\bar{x}) = A(x_1\bar{b}_1 + \dots + x_n\bar{b}_n) = x_1(A\bar{b}_1) + \dots + x_m(A\bar{b}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} A\bar{b}_1 & A\bar{b}_2 & \cdots & A\bar{b}_n \end{pmatrix}\bar{x}$$

② **Definition**

Om A är en $k\times m$-matris och B en $m\times n$-matris så är AB $k\times n$-matrisen

$$AB = A[\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n] = [A\bar{b}_1\ \ A\bar{b}_2\ \cdots\ A\bar{b}_n]$$



$$(AB)_{j,l} = (A\bar{b}_l)_j = a_{j,1}b_{1,l} + a_{j,2}b_{2,l} + \cdots + a_{j,m}b_{m,l}$$

Ex

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 6 & 8 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot6 & 1\cdot7+2\cdot8 & 1\cdot9+2\cdot0\\ 3\cdot5+4\cdot6 & 3\cdot7+4\cdot8 & 3\cdot9+4\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 23 & 9\\ 39 & 53 & 27\end{pmatrix}$$

Teorem 2 (förutsatt matchande dimensioner på $A\,B\,C$)

a) $A(BC) = (AB)C$

b) $A(B+C) = AB + AC$

c) $(B+C)A = BA + CA$

d) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$

e) $I_m A = A = A I_n$

Bevis

b) – e) bevisas i övningsuppgifter.

För a), låt $C = (\bar{c}_1\ \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_p)$

Då är $BC = (B\bar{c}_1\ \ B\bar{c}_2\ \cdots\ B\bar{c}_p)$

$$A(BC) = A(B\bar{c}_1\ B\bar{c}_2 \cdots B\bar{c}_p) = (A(B\bar{c}_1)\ \ A(B\bar{c}_2)\ \cdots\ A(B\bar{c}_p))$$

$$= ((AB)\bar{c}_1\ \ (AB)\bar{c}_2 \cdots (AB)\bar{c}_p) = (AB)C$$

VSV.

<u>Ex</u> Om $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

så är
$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{bmatrix}$$

Ej lika!

Gäller i allmänhet att $AB \neq BA$!

<u>Ex:</u>
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alltså är
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

$$AB = AI \quad \text{men} \quad B \neq I$$

Man kan inte alltid "förkorta" bort en matris A från ekvation av typ $AB = AC$!

<u>Ex:</u>
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kan alltså ha $AB = 0$ utan att vare sig A eller B är nollmatris!

④ För alla nollskilda reella tal r finns en "multiplikativ invers" $r^{-1} = \frac{1}{r}$ sådan att $r^{-1}r = rr^{-1} = 1$.

För en $n \times n$-matris A säger man att A är inverterbar om det finns en $n \times n$-matris C sådan att

$$CA = AC = I_n.$$

Man skriver då $C = A^{-1}$ = inversen till A.

En matris som inte är inverterbar kallas singulär.

Ex: om $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ så är

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså är $C = A^{-1}$

Teorem 4

Om $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $ad - bc \neq 0$ så är A inverterbar och $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Om $ad - bc = 0$ så är A inte inverterbar.

Bevis: Sista påståendet är övningsuppgift 25.

Om $ad - bc \neq 0$ så är

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VSV.

Teorem 6 a

Om A är en inverterbar matris så är A^{-1} inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$.

Bevis Följer direkt av definitionen av / att $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Om A är inverterbar så kan detta utnyttjas för ekvationslösning:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$
$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$AB = C$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n} B = C$$
$$B = C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I_n\right)A = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} + A\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{pmatrix}$$ Radoperation!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$ Radbyte!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{pmatrix}$$ Mult med konstant

Även sid 114 i boken

Gäller allmänt att varje radoperation kan skrivas som multiplikation från vänster med en inverterbar matris E. Man kan utnyttja detta genom att göra Gausselliminering av en matris A och samtidigt göra samma radoperationer på I_n

$$(\underbrace{A}_{n\times n} \mid I_n) \sim (E_1 A \mid E_1 I_n) \sim (E_2 E_1 A \mid E_2 E_1 I_n) \sim \dots$$

$$\sim (\overbrace{\underbrace{E_m E_{m-1} \cdots E_1 A}_{\text{kalla denna } E}}^{= I_n} \mid \underbrace{E_m E_{m-1} \cdots E_1 I_n}_{= E})$$

6

Definiera $C = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1}$. Då är

$$CE = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1} \underbrace{E_m^{-1} E_m}_{=I_n} E_{m-1} \cdots E_2 E_1 = I_n$$

$$EC = E_m E_{m-1} \cdots E_2 \underbrace{E_1 E_1^{-1}}_{I_n} E_2^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} = I_n$$

Alltså är E inverterbar och

$$EA = I_n$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{E^{-1}E}_{=I_n}A = E^{-1}I_n$$
$$\Downarrow$$
$$A = E^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1} = E$$

inverterbar med invers E enligt Teorem 6a

Kortare: Vi visar på nästa lektion att $EA = I_n \Rightarrow A$ inverterbar och $A^{-1} = E$.

Vi har alltså visat att om Gausselimineing av $\underset{n \times n}{A}$ till reducerad trappstegsform ger I_n så är A inverterbar och $(A \mid I_n) \sim (I_n \mid A^{-1})$

Omvänt: Om A är inverterbar så har $A\bar{x} = \bar{b}$ lösning för varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$. Detta medför att A har ett pivåelement i varje rad och Gausselliminering till trappstegsform måste alltså ge I_n.

Detta ger:

Teorem 7

En $n \times n$-matris är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med I_n (dvs om och endast om den kan förenklas till I_n med radoperationer). När så är fallet så gäller att

$$(A \mid I_n) \sim \cdots \sim (I_n \mid A^{-1}).$$

Ex: Räkna ut invers till $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$