L14 Inversa matriser. Determinanter

Transponat (= kasta om rader och kolumner)

Ex: $\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Teorem 3 (avsn. 2.1)

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

c) För skalär r: $(rA)^T = rA^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$

Bevis: a) – c) enkla

d):

$$((AB)^T)_{jk} = (AB)_{k,j} = a_{k,1} b_{1,j} + a_{k,2} b_{2,j} + \dots + a_{k,n} b_{n,j}$$

$$(B^T A^T)_{jk} = \left(j: \begin{pmatrix} b_{1,j} & b_{2,j} & \cdots & b_{n,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{kol } k: \\ \boxed{\begin{array}{c} a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{array}} \end{array} & \end{pmatrix} \right)_{jk} =$$

$$= a_{k,1} b_{1,j} + a_{k,2} b_{2,j} + \dots + a_{k,n} b_{n,j}$$

Teorem 6 (Avsn. 2.2) För inverterbara $n \times n$-matriser A och B

a) A^{-1} är inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$

b) AB inverterbar och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) A^T inverterbar och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bevis

a) visades förra lektionen

b) $B^{-1} A^{-1} AB = B^{-1} I_n B = B^{-1} B = I_n$

och på samma sätt: $AB\, B^{-1} A^{-1} = I_n$

c) $(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = I_n^T = I_n$

$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I_n^T = I_n$

(2)

Teorem 8 Avsn. 2.3 För $n\times n$-matris A är följande ekvivalenta:

a) A inverterbar

b) A är radekvivalent med I_n.

c) A har n pivotelement

d) $A\bar{x}=\bar{0}$ har bara triviala lösningen.

e) kolumnerna i A är linjärt oberoende.

f) Den linjära avbildningen $\bar{x}\mapsto A\bar{x}$ är 1-1

g) Ekvationen $A\bar{x}=\bar{b}$ har minst en lösning för varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$.

h) Kolumnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$

i) Den linjära avbildningen $\bar{x}\mapsto A\bar{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$.

j) Det finns en $n\times n$-matris C sådan att $CA=I_n$

k) Det finns en $n\times n$-matris D sådan att $AD=I_n$

l) A^T är inverterbar

Nytt!

Bevis

$(b)\Rightarrow(a)\Rightarrow(j)$
$\Uparrow \qquad\qquad \Downarrow$
$(c)\Leftarrow(d)$

- Om a) är sant så är $A^{-1}A=I_n$ dvs j) är sant
- Om j) är sant så har vi $CA=I_n$. Antag att $A\bar{x}=\bar{0} \Rightarrow \underbrace{CA}_{I_n}\bar{x}=C\bar{0}=\bar{0} \Leftrightarrow I_n\bar{x}=\bar{0} \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{0}$

  Alltså följer att d) är sant

Detta ger

a) $\Rightarrow$ j) $\Rightarrow$ d) $\Leftrightarrow$ a)

- Antag att (d) är sant. Gausseliminera $(A\,|\,\bar{0})$. Då måste det finnas ett pivåelement på varje rad, ty om rad k saknar pivåelement så fås fri variabel x_k och oändligt många lösningar. Alltså är c) sant.
- Om c) är sant så ger Gausselliminering till reducerad trappstegsform en etta på varje rad, som måste ligga på diagonalen ty $n\times n$-matris. Alltså b) sann.
- b) $\Rightarrow$ a) enligt Teorem 7 i avsnitt 2.2

Följer från tidigare lektioner skippas därför på denna lektion

- Att g) $\Leftrightarrow$ c) följer av Exempel 1 sid 13 i boken.

$\nearrow(k)$ $\Downarrow$
$(a) \Leftarrow (g)$

- Om a) sant så är $AA^{-1} = I_n$, så k) är sant.
- Om k) är sant så gäller att
  $AD = I_n \Rightarrow (AD)\bar{b} = I_n\bar{b} \Rightarrow A(D\bar{b}) = \bar{b}$
  alltså följer att k) $\Rightarrow$ g) $\Leftrightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) enligt förra sidan.
- Anta nu att g) är sant, dvs för varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$ har $A\bar{x} = \bar{b}$ minst en lösning.
  Då måste det finnas ett pivåelement på varje rad (ty annars kan $\bar{b}$ väljas så att en rad blir $0 = $ (någonting nollskillt)).
  Alltså n pivåelement och vi har visat ovan att det med för att A är inverterbar

Behövs ej!

$(g) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (i)$ ← har visats i tidigare avsnitt.
$(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f)$
$(a) \Leftrightarrow (l)$

v.s.v.

Från j och k fås att

$CA = I_n \Rightarrow$ A inverterbar och $C\underbrace{AA^{-1}}_{I_n} = I_n A^{-1} \Leftrightarrow C = A^{-1}$

$AD = I_n \Rightarrow$ A inverterbar och $D = A^{-1}AD = A^{-1}I_n \Leftrightarrow D = A^{-1}$

Alltså:

$$\boxed{A, B \ n\times n \text{ och } AB = I_n \Rightarrow A, B \text{ inverterbara och } B = A^{-1} \text{ och } A = B^{-1}}$$

Ex: Är $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ inverterbar?

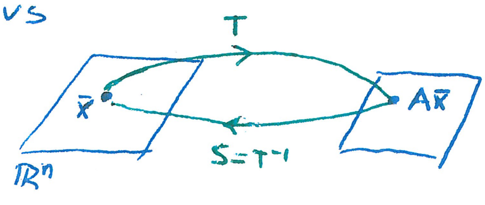
Lösning: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 3 pivåelement $\Rightarrow$ A inverterbar.

sid 121 i boken

Ex: För linjära avbildningar, om $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ och $S(\bar{y}) = A^{-1}\bar{y}$ så motsvarar $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ att

$A^{-1}A\bar{x} = AA^{-1}\bar{x} = I_n\bar{x} = \bar{x}$, dvs

$S(T(\bar{x})) = T(S(\bar{x})) = \bar{x}$



4

För en 2x2-matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ har vi sett att

A är inverterbar om $ad - bc \neq 0$ och då är $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$ad-bc$ kallas determinanten för A.

För 3x3-matris A, låt

$A_{k,l}$ vara determinanten för matrisen man får genom att ta bort rad k och kolumn l från A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} \\ A_{1,3} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}, \quad A_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} \\ A_{2,3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}, \quad A_{3,1} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \\ A_{3,2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{bmatrix}, \quad A_{3,3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \end{array}$$

För inverterbart A krävs minst en nollskild. Antag att vi gjort radbyten så att $a_{1,1}$ är nollskild.

Gausseliminering:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & |A_{3,3}| & |A_{3,2}| \\ 0 & |A_{2,3}| & |A_{2,2}| \end{pmatrix}$$

där vi förutsätter att radoperationer (eventuellt inklusive radbyte) utförs så att $A_{3,3} \neq 0$ och $a_{1,1} \neq 0$ om detta är möjligt.

Fortsatt Gausseliminering ger

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & |A_{3,3}| & |A_{3,2}| \\ 0 & |A_{2,3}| & |A_{2,2}| \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{3,3}\cdot(3) - A_{2,3}\cdot(2)} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & |A_{3,3}| & |A_{3,2}| \\ 0 & 0 & |A_{3,3}||A_{2,2}| - |A_{2,3}||A_{3,2}| \end{pmatrix}$$

$= \det(A_{3,2})$

$$(|A_{3,3}||A_{2,2}| - |A_{2,3}||A_{3,2}|) = (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})(a_{1,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{1,3}) - (a_{1,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{1,2})(a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3})$$

$$= a_{1,1}^2 a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,1}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{1,1}a_{3,3} + \cancel{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,1}a_{1,3}}$$
$$- a_{1,1}^2 a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,1}a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} + a_{1,1}a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - \cancel{a_{1,2}a_{1,3}a_{2,1}a_{3,1}}$$

$$= a_{1,1}(a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1})$$

$$= a_{1,1}(a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}))$$

$$= a_{1,1}\underbrace{(a_{1,1}|A_{1,1}| - a_{1,2}|A_{1,2}| + a_{1,3}|A_{1,3}|)}_{\text{Detta kallas determinanten för A, } \det(A)}$$

Vi kommer att se nästa lektion att inledande radbyten endast ändrar tecken på determinanten och man kan komma fram till att A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Men ett lättare bevis för detta kommer nästa lektion (Teorem 4, sid 185).

Ej på lektion!

Titta ej för djupt i föregående exempel, för det blir nog bara förvirrande. Slutsatsen att A inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$ följer på ett enklare sätt i avsnitt 3.2.

Definition

För en $n \times n$-matris $A = \begin{array}{c} \\ \text{rad } j \end{array} \begin{pmatrix} & \text{kol. } k & \\ & a_{j,k} & \end{pmatrix}$

Låt $A_{j,k}$ vara ~~determinanten för~~ matrisen som fås om man plocka-bort rad j och kolumn k från A.

Då har A determinanten

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det A_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j}$$

Det viktigaste i avsnitt 3.1 är Teorem 1

Teorem 1

För $A_{j,k}$ som ovan, definiera kofaktorn $C_{j,k} = (-1)^{k+j} \det A_{k,j}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Då är

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$$ Utveckling längs rad i

$$= a_{1,j} C_{1,j} + a_{2,j} C_{2,j} + \cdots + a_{n,j} C_{n,j}$$ Utveckling längs kolumn j

Praktiskt att välja att utveckla längs en rad eller kolumn med så många nollor som möjligt.

Exempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ← 2 nollor i rad 3! $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Utveckling längs rad 3 ger att

$$\det(A) = +0\, C_{3,1} - (-2)\, C_{3,2} + 0\, C_{3,3} =$$

$$= 2\, C_{3,2} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\,(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0) =$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2$$

Notera: Samma resultat som ficks från utveckling längs rad 1 på s. 165 i boken

(6)

$$\begin{array}{cccc} & & \text{3 nollor} & \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2\, C_{1,3} + 0 \cdot C_{2,3} + 0 \cdot C_{3,3} + 0 \cdot C_{4,3} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -5 & -8 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(0 \cdot C_{1,1} + (-5) \cdot C_{2,1} + 0 \cdot C_{3,1} \right)$$

$$= -2 \cdot 5 \cdot C_{2,1} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 10 \left(3 \cdot (-6) - 5 \cdot (-4) \right) = 10(-18 + 20) = 20$$