L15 Beräkning av determinanter, egenskaper, Cramers regel

Determinant av triangulär matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot C_{1,1} + 0C_{2,1} + \cdots + 0\,C_{n,1} = a_{1,1}\,C_{1,1}$$

men $C_{1,1}$ är också determinanten av en triangulär matris så på samma sätt fås $\det(A) = a_{1,1} \cdot \det(A_{1,1}) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$

Teorem 2 (avsnitt 3.1)

Om A är en triangulär matris (= enbart nollor under diagonalen alternativt enbart nollor över diagonalen) så är det (A) = produkten av diagonalelementen.

En viktig egenskap är hur determinanter påverkas av radoperationer: Man kan visa följande:

Teorem 3 (avsnitt 3.2)

För en $n \times n$-matris A gäller att

a) Om B fås genom att addera en multipel av en rad i A till en annan rad i A, då är $\det(B) = \det(A)$

b) Om B fås genom att byta plats på två rader i A så är $\det(B) = -\det(A)$

c) Om B fås genom att multiplicera elementen på en rad i A med k så är $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

Bevis Sid 173 i boken.

(2)

Exempel 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{\text{Faktorisera ut 2 ur rad 1}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{(3)+4\cdot(2)}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{(4)+(-\frac{1}{2})\cdot(3)}{=}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot(-6)\cdot 1 = -36$$

På det här sättet kan man alltid reducera en $n\times n$-matris A till trappstegsform genom att göra radbyten och genom att addera multipel av rad till annan rad $A \sim \cdots \sim U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & u_{nn} \end{pmatrix} =$ och då är $\det(A) = u_{1,1}\, u_{2,2} \cdots u_{n,n}$, så

A inverterbar $\iff$ A har n pivåelement (som därmed måste ligga på diagonalen)

$\iff$ $\begin{cases} \text{triangulär efter Gausselliminering och med} \\ \text{alla diagonalelement nollskilda} \end{cases}$

$\iff 0 \neq u_{1,1}\, u_{2,2} \cdots u_{n,n} = \det(A)$

$$\boxed{A \text{ inverterbar} \iff \det(A) \neq 0}$$

<u>Ex</u> Uppg. 3.2.26 Använd determinanter för att avgöra om vektorerna är linjärt oberoende.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3\\5\\-6\\4\end{pmatrix}}_{\bar a_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-6\\0\\7\end{pmatrix}}_{\bar a_2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\0\end{pmatrix}}_{\bar a_3} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\end{pmatrix}}_{\bar a_4}$$

$\{\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3, \bar a_4\}$ linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ $x_1\bar a_1 + x_2\bar a_2 + x_3\bar a_3 + x_4\bar a_4 = \bar 0$ har bara triviala lösningen

$\Leftrightarrow \underbrace{(\bar a_1\ \bar a_2\ \bar a_3\ \bar a_4)}_{A}\bar x = \bar 0$ —— " ——

$\Leftrightarrow$ A inverterbar

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix}3 & 2 & -2 & 0\\5 & -6 & -1 & 0\\-6 & 0 & 3 & 0\\4 & 7 & 0 & -3\end{vmatrix} = a_{1,4}C_{1,4} + a_{2,4}C_{2,4} + a_{3,4}C_{3,4} + a_{4,4}C_{4,4} = -3A_{4,4}$$

$=0$

$$\begin{pmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{pmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\5 & -6 & -1\\-6 & 0 & 3\end{vmatrix} = -3(-6\cdot C_{3,1} + 0\cdot C_{3,2} + 3\,C_{3,3}) = -3(-6A_{3,1} + 3A_{3,3}) =$$

$$= -3\left(-6\begin{vmatrix}2 & -2\\-6 & -1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & -6\end{vmatrix}\right) = -3(-6\cdot(-2-12) + 3\cdot(-18-10))$$

$$= -3(+6\cdot 14 - 3\cdot 28) = 0$$

SVAR Alltså <u>ej</u> linjärt oberoende vektorer!

<u>Teorem 5</u> Om A är en $n\times n$-matris så är $\det(A^T) = \det(A)$

<u>Bevis:</u> Uppenbart för $n=1$. Bevisar med induktion.

<u>Antag sant för $n=k$.</u> Låt $n=k+1$.

Utveckla längs rad 1 för A och längs kolumn 1 för $B = A^T$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}|A_{1,j}|$$

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}b_{j,1}|B_{j,1}| = \sum_{j=1}^{N}(-1)^{1+j}a_{1,j}|A_{1,j}^T| = \det(A)$$

Fås genom att ta bort rad j och kolumn 1 ur A^T och räkna ut determinanten. Men enligt vårt antagande är det la samma som att ta bort rad 1 och kolumn j från A och räkna ut determinanten

VSV.

4

Ex

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}}_{A} \underset{(3)+2\cdot(1)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}}_{U} = 0$$

Man kan se det på flera sätt. T ex

En radoperation till ger nollrad, vilket ger färre än n pivåelement

$\det(A) = \det(U) = \det(U^T) = 0$ eftersom två av kolumnerna är lika, vilket ger linjärt beroende kolumner så att U^T ej är inverterbar och därmed $\det(U^T) = 0$.

Teorem 6 (i avsnitt 3.2)

Om A och B är $n \times n$-matriser så är $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bevis

Fall 1: Om A inte är inverterbar så följer att AB inte är inverterbar, ty annars kan vi konstruera $D = B(AB)^{-1}$ och få $AD = AB(AB)^{-1} = I_n$ vilket ger inverterbart A enligt Theorem 8 på förra lektionen. Alltså är

$$\det(A)\det(B) = 0 = \det(AB)$$

Fall 2: Om A är inverterbar så är den radekvivalent med I_n, så precis som förra lektionen kan vi skriva

$$\underbrace{E_m E_{m-1} \cdots E_1}_{\text{elementära matriser}} A = I_n$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1}$$

Enligt Teorem 3 (sid 1) så har en elementär matris determinant

$$\det(E) = \det(E I_n) = \begin{cases} \det(I_n) = 1 & \text{om } E \text{ motsvarar addera multipel av rad till annan rad} \\ -\det(I_n) = -1 & \text{om } E \text{ motsvarar radbyte} \\ k\det(I_n) = k & \text{om } E \text{ motsvarar att multiplicera rad med konstant} \end{cases}$$

och $\det(EM) = \det(E)\det(M)$ för alla $n \times n$-matriser M.

$$\det(AB) = |AB| = |E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} B| =$$

$$= |E_1^{-1}|\,|E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} B| = \cdots = |E_1^{-1}| \cdot |E_2^{-1}| \cdots |E_m^{-1}| \cdot |B| =$$

$$= |E_1^{-1} E_2^{-1}| \cdot |E_3^{-1}| \cdot |E_4^{-1}| \cdots |E_m^{-1}| \cdot |B| = |E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1}| \cdot |B| =$$

$$= |A| \cdot |B|$$

V.S.V.

För en $n \times n$-matris $A = (\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n)$ och $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, definiera

$$A_k(\bar{x}) = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \cdots \ \bar{a}_{k-1} \ \bar{x} \ \bar{a}_{k+1} \ \cdots \ \bar{a}_n)$$

Teorem 7 Cramers regel (Avsnitt 3.3)

För varje inverterbar $n \times n$-matris A och varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$ så ges den unika lösningen $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ till $A\bar{x} = \bar{b}$ av

$$x_k = \frac{\det(A_k(\bar{b}))}{\det(A)}$$

Bevis

För $A = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \cdots \ \bar{a}_n)$ och $I_n = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \cdots \ \bar{e}_n)$

så är

$$A\, I_k(\bar{x}) = A(\bar{e}_1 \ \cdots \ \bar{e}_{k-1} \ \bar{x} \ \bar{e}_{k+1} \ \cdots \ \bar{e}_n)$$

$$= (A\bar{e}_1 \ \cdots \ A\bar{e}_{k-1} \ A\bar{x} \ A\bar{e}_{k+1} \ \cdots \ A\bar{e}_n)$$

$$= (\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_{k-1} \ \bar{b} \ \bar{a}_{k+1} \ \cdots \ \bar{a}_n) = A_i(\bar{b})$$

$$\det(A)\det(I_k(\bar{x})) = \det(A_k(\bar{b}))$$

$$\frac{\det(A_k(\bar{b}))}{\det(A)} = \det(I_k(\bar{x})) = \begin{vmatrix} 1 & & & x_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & x_{k-1} & & & \\ & & & x_k & & & \\ & 0 & & x_{k+1} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & x_n & & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_k$$

Om $x_k = 0$ så har vi noll-rad, så matrisen är ej inverterbar och har determinant 0. Om $x_k \neq 0$, så kan vi elliminera alla x_n utom x_k med radoperationer och få determinanten $=$
$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot x_k \cdot 1 \cdots 1 = x_k$

VSV.

6

Ex Uppgift 3.3.4

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = -5 \end{cases} \iff A\bar{x} = \bar{b} \text{ med } A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } \bar{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A_1(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_1(\bar{b})) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 15 = 6$$

$$A_2(\bar{b}) = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \det(A_2(\bar{b})) = \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 25 - 27 = -2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1(\bar{b}))}{\det(A)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2(\bar{b}))}{\det(A)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Kontroll:

$$\begin{cases} -5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18}{2} = 9 \\ 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

stämmer!

Ex2 sid 178

$$\begin{cases} 3s\,x_1 - 2x_2 = 4 \\ -6x_1 + s\,x_2 = 1 \end{cases}$$

Lösbar för vilket/vilka s? hitta lösning med Cramers regel

Skriv på formen $A\bar{x} = b$ med $A = \begin{pmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_1(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

$$A_2(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3s^2 - 12 = 3(s^2 - 4) = 3(s-2)(s+2)$$

Unik lösning $\iff$ A inverterbar $\iff$ $\det(A) \neq 0 \iff s \neq \pm 2$

För $s \neq \pm 2$

$$x_1 = \frac{\det A_1(\bar{b})}{\det(A)} = \frac{4s+2}{3(s-2)(s+2)}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\bar{b})}{\det(A)} = \frac{3s+24}{3(s-2)(s+2)} = \frac{s+8}{(s-2)(s+2)}$$

Cramers regel ger en explicit formel för elementen i A^{-1} för en inverterbar matris A. Låt

$$A^{-1} = (\ \bar{x}_1 \ \cdots \ \bar{x}_n\ ).$$

Då är

$$(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n) = I_n = A\,A^{-1} = A(\ \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) = (A\bar{x}_1 \ \cdots \ A\bar{x}_n)$$

Alltså är kolumn k i A^{-1} lösningen till $A\bar{x}_k = \bar{e}_k$

Elementet på rad r och kolumn k i A^{-1} fås alltså från Cramers regel:

$$(A^{-1})_{r,k} = \frac{\det(A_r(\bar{e}_k))}{\det(A)} \qquad (*)$$

observera även att

$$\det(A_r(\bar{e}_k)) = \det((\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{r-1}\ \bar{e}_k\ \bar{a}_{r+1} \cdots \bar{a}_n)),$$

där utveckling längs kolumn r ger exakt en nollskild term:

$$\det(A_r(\bar{e}_k)) = (-1)^{k+r}\det(A_{k,r}) = C_{k,r},$$

dvs $$(A^{-1})_{r,k} = \frac{(-1)^{k+r}\det(A_{k,r})}{\det(A)} = \frac{C_{k,r}}{\det(A)}$$

Detta ger

Teorem 8

För en nxn-matris A är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

för den adjungerade matrisen (adjoint matrix)

$$\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & \cdots & C_{n,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & \cdots & C_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & C_{2,n} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix}$$

8 Ex: Uppgift 3.3.15

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 3\cdot 1\cdot 2 = 6$$

Tecken för $C_{n,k}$: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{1,2} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $A_{1,3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3+2 = -1$

$C_{1,1} = 2$, $C_{1,2} = +2$, $C_{1,3} = -1$

$A_{2,1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $A_{2,2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$, $A_{2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

$C_{2,1} = -0$, $C_{2,2} = 6$, $C_{2,3} = -9$

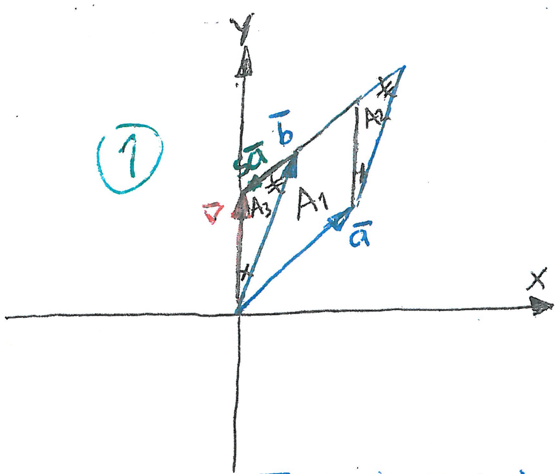
$A_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{3,2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{3,3} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

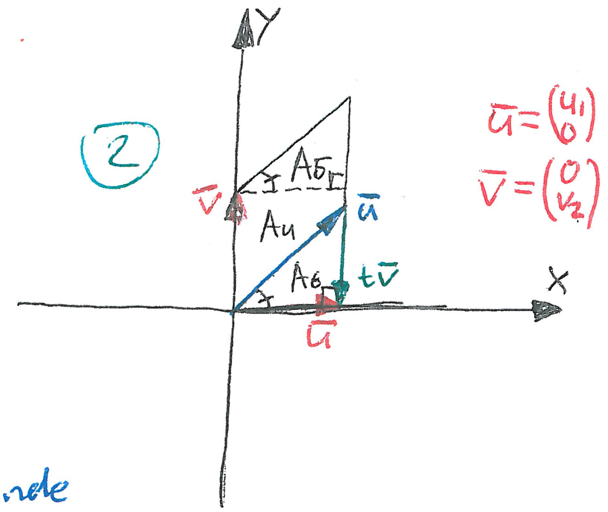
$C_{3,1} = 0$, $C_{3,2} = -0$, $C_{3,3} = 3$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

SVAR: $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{pmatrix}$

|Determinanten| = area av parallellogram alternativt volym av parallellepiped





Antag att $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är linjärt oberoende

$A =$ Parallellogrammets area $= A_1 + A_2 = A_1 + A_3 = A_4 + A_5 = A_4 + A_6 = u_1 v_2$

$M = (\bar{a} \ \ \bar{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Enligt avsnitt 10.3 i Adams: $A = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = |\det(M)|$

Behövs ej. Redan gjort i Adams.

$$\det(M) = \det(M^T) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \underbrace{b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2}_{=v_2} \end{vmatrix} \overset{2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{=u_1}{a_1} & 0 \\ 0 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 = A$$

Jag antog här att $a_1 \neq 0$, men om så ej varit fallet hade det kunnat fixas med radbyte, vilket byter tecken på determinanten.

Från detta följer (med liknande resonemang för 3x3):

Teorem 9

Om A är en 2x2-matris så är $|\det(A)|$ = arean för parallellogrammet som ges av kolumnerna i A.

Om A är en 3x3-matris så är $|\det(A)|$ = = volymen för parallellepipeden som ges av kolumnerna i A.

Om P är parallellogrammet som ges av $\bar{a}_1$ och $\bar{a}_2$ och om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ då kan P skrivas som mängden

$$P = \{ s_1\bar{a}_1 + s_2\bar{a}_2 ; 0 \leq s_1 \leq 1, 0 \leq s_2 \leq 1 \}$$

T avbildar dessa vektorer på

$$T(s_1\bar{a}_1 + s_2\bar{a}_2) = s_1 T(\bar{a}_1) + s_2 T(\bar{a}_2)$$

Om T har standardmatris M så är alltså

$$T(s_1\bar{a}_1 + s_2\bar{a}_2) = s_1 M\bar{a}_1 + s_2 M\bar{a}_2, \quad 0 \leq s_n \leq 1$$

Detta är också ett parallellogram, med två sidor givna av $M\bar{a}_1$ och $M\bar{a}_2$, och med arean

$$\det([M\bar{a}_1 \ M\bar{a}_2]) = \det(M \cdot \underbrace{[\bar{a}_1 \ \bar{a}_2]}_{A}) = \det(M)\det(A)$$

$$= \det(M) \cdot \text{Arean för } P.$$

Följer ur avsnitt 10.3 i Adams: För $A = (\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ så är

$$\det(A) = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

och parallellepipeden med sidor givna av $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ har volym

$$V = |\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})| = \left| \bar{c} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \bar{c} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right| = |\det(A)|$$

Från detta och liknande resonemang för $\mathbb{R}^3$ fås

Teorem 10

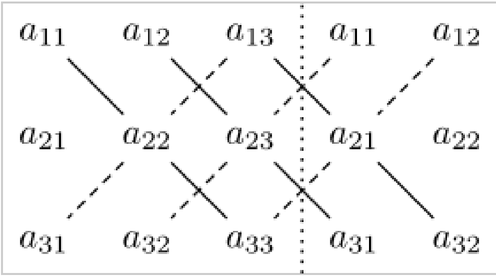
För en linjär avbildning T med 3x3 2×2 standardmatris M gäller att varje parallellepiped parallellogram P avbildas på en ett parallellepiped parallellogram med area

$$\text{area av } T(P) = |\det(M)| \cdot \text{arean av } P$$

Rule of Sarrus

From Wikipedia, the free encyclopedia

Sarrus' rule or **Sarrus' scheme** is a method and a memorization scheme to compute the determinant of a 3×3 matrix. It is named after the French mathematician Pierre Frédéric Sarrus.



Sarrus' rule: The determinant of the three columns on the left is the sum of the products along the solid diagonals minus the sum of the products along the dashed diagonals

Consider a 3×3 matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

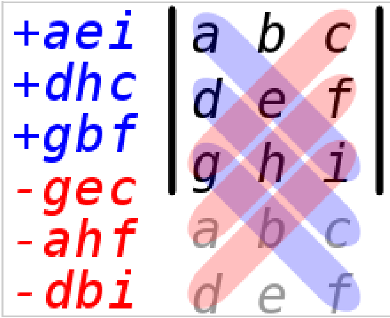
then its determinant can be computed by the following scheme:

Write out the first 2 columns of the matrix to the right of the 3rd column, so that you have 5 columns in a row. Then add the products of the diagonals going from top to bottom (solid) and subtract the products of the diagonals going from bottom to top (dashed). This yields:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

A similar scheme based on diagonals works for 2x2 matrices:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$



Alternative vertical arrangement

Both are special cases of the Leibniz formula, which however does not yield similar memorization schemes for larger matrices. Sarrus' rule can also be derived by looking at the Laplace expansion of a 3×3 matrix.

References

- Khattar, Dinesh (2010). *The Pearson Guide to Complete Mathematics for AIEEE* (http://books.google.de/books?id=7cwSfkQYJ_EC&pg=SA6-PA2) (3rd ed.). Pearson Education India. p. 6-2. ISBN 978-81-317-2126-1.
- Fischer, Gerd (1985). *Analytische Geometrie* (in German) (4th ed.). Wiesbaden: Vieweg. p. 145. ISBN 3-528-37235-4.

External links

- Sarrus' rule at Planetmath (http://planetmath.org/encyclopedia/RuleOfSarrus.html)
- *Linear Algebra: Rule of Sarrus of Determinants* (http://www.youtube.com/watch?v=4xFIi0JF2AM) at khanacademy.org

Wikimedia Commons has media related to ***Sarrus rule***.

Retrieved from "http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rule_of_Sarrus&oldid=633970400"

Categories: Linear algebra

- This page was last modified on 15 November 2014 at 18:52.
- Text is available under the Creative Commons Attribution-ShareAlike License; additional terms may apply. By using this site, you agree to the Terms of Use and Privacy Policy. Wikipedia® is a registered trademark of the Wikimedia Foundation, Inc., a non-profit organization.

regularize

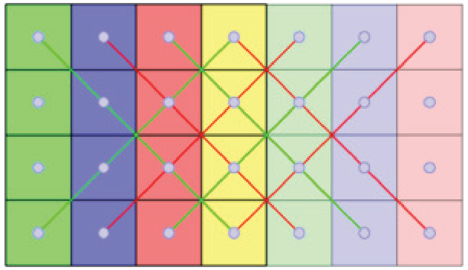
Trying to keep track of what I stumble upon

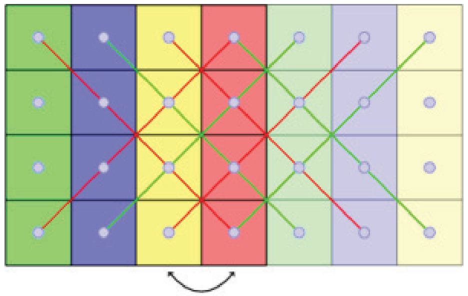
June 24, 2011

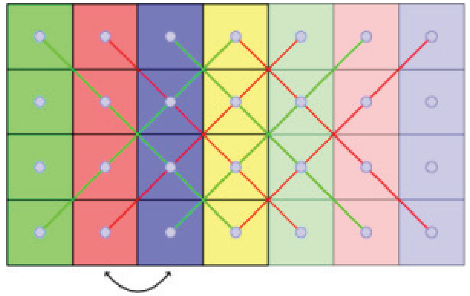
Sarrus Rules for 4 x 4 (second try)

Posted by Dirk under Math | Tags: Determinant, sarrus |
[8] Comments

My colleague K.-J. Wirths came up with another Rule of Sarrus for 4×4 matrices. His suggestion is somehow closeto the original (at least graphically) and is easier to memorize. One has to use the “original” Rule of Sarrus for the 4×4 case but now three times. For the first case use the original matrix and for the next two case one has to permute two columns. Graphically this gives the following the pictures:







In principle this generalizes to larger $n \times n$ matrices. But beware: $n!$ is large! For the 5×5 case one has a sum of 120 products but each “standard Sarrus” only gives 10 of them. Hence, one has to figure out 12 different permutations. In the $n \times n$ case one even needs to memorize $\frac{n!}{2n}$ permutation, let alone all the computations…

I am sure that somebody with stronger background in algebra and more knowledge about permutation groups could easily figure out what is going on here, and to visualize the determinants better.

Update: Indeed! Somebody with more background in algebra already explored how to generalize the Sarrus rule to larger matrices. Again it was my colleague K.-J. Wirths who found the reference and here it is:

- Обобщенное правило Саррюса, by С. Аршон, Матем. сб., 42:1 (1935), 121–128

and it is from 1935 already! If you don’t speak Russian, in German it is

- “Verallgemeinerte Sarrussche Regel”, S. Arschon, Mat. Sb., 42:1 (1935), 121–128

and if you don’t speak German either, you can visit the page in mathnet.ru or to the page in the Zentralblatt (but it seems that there is no English version of the paper or the abstract available…) Anyway, you need $(n-1)!/2$ permutations of the columns and apply the plain rule of Sarrus to all these (and end up, of course, with $2n(n-1)!/2 = n!$ summands, each of which has n factors – way more than using LU of QR factorization.)

8 Responses to “Sarrus Rules for 4 x 4 (second try)”

1. Sarrus Rules for 4 x 4 « regularize Says:

   September 7, 2011 at 2:00 pm
   […] a follow-up post, I have show a simpler visualization. Share this:TwitterFacebookLike this:LikeBe the first to like […]

   Reply
2. Sarrus rule, and extensions to higher orders « Alasdair's musings Says:

August 16, 2012 at 6:16 am
[...] rules don't originate with me, of course; you can see the same rule here. I'm sure I'm the seven millionth person to have done [...]

Reply

3. Robin Whitty Says:

   November 18, 2013 at 6:34 pm
   Very interesting! I've done a diagrammatic version of the 4×4 rule, based on an octagon: http://www.theoremoftheday.org/GeometryAndTrigonometry/Sarrus/Sarrus4x4.pdf

   Reply

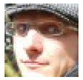
4. chimpintrin Says:

   August 13, 2014 at 4:39 pm
   The simplest method was found in October in the year 200, by the Mexican mathematical Gustavo Villalobos Hernandez of the University of Guadalajara. It is in Spanish in the following wikipedia page:

   http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Villalobos

   Reply

   1. Dirk Says:

      August 13, 2014 at 5:18 pm
      Yeah, you can also permute the rows… Seems a bit simpler to memorize since one uses the same sign pattern that way.

      Reply

      1. chimpintrin Says:

         August 13, 2014 at 7:20 pm
         Thanks for your comment. Actually I do not speak English. I speak Spanish and Russian. I think it would be appropriate wikipedia page

         https://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Villalobos

         I could be in English. I could use a virtual translator, but are not very accurate.

         Greetings

      2. chimpintrin Says:

         August 13, 2014 at 7:26 pm
         Thanks for your comment. Actually I do not speak English. I speak Spanish and Russian. I think it would be appropriate wikipedia page

         https://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Villalobos

         I could be in English. I could use a virtual translator, but are not very accurate.

         Greetings.

      3. mehta satish Says:

         August 17, 2014 at 9:39 am
         thanks/ i have also tried similar – but this yours is better/easier please send some actual numerical solved showing actions /few things not clear

Create a free website or blog at WordPress.com. — The Connections Theme.