L20 Egenskaper, medelvärde

(Avsnitt 5.4) 1

Om man i definitionen av bestämd integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sätter in $a=b$ (rektanglar med bredd $=0$), $b<a$ (negativt Δx_i) så får man de första två av följande räkneregler:

Teorem 3

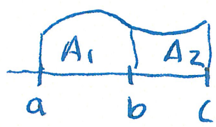
a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_a^b (A f(x) + B g(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$

(dvs $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$ är en linjär avbildning)

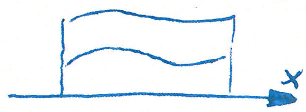
d) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$



$A = A_1 + A_2$

e) Om $a \le b$ och $f(x) \le g(x)$ då $a \le x \le b$ så gäller att

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

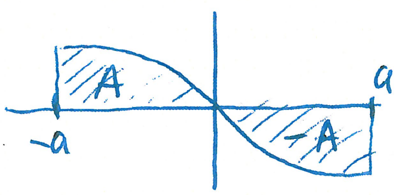


Större area mellan övre kurvan och x-axeln

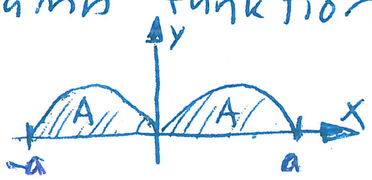
f) Triangelolikheten för summor ger motsvarande för integraler:

$\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

g) För udda funktion f: $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$



h) För jämn funktion f: $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



② **Uppg 5.4.2** Förenkla

$$\int_0^2 3f(x)\,dx + \int_1^3 3f(x)\,dx - \int_0^3 2f(x)\,dx - \int_1^2 3f(x)\,dx =$$

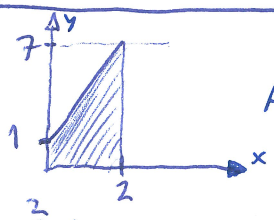
$$= \int_0^1 3f(x)dx + \int_1^2 3f(x) + \int_1^2 3f(x)dx + \int_2^3 3f(x)dx - \int_0^1 2f(x)dx - \int_1^2 2f(x)dx - \int_2^3 2f(x)dx - \int_1^2 3f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (3-2)f(x)dx + \int_1^2 (3+\cancel{3}-2-\cancel{3})f(x)dx + \int_2^3 (3-2)f(x)dx =$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx$$

Vissa integraler kan räknas ut genom areatolkning:

Uppg 5.4.4



Area av parallelltrapets

Använd denna formel eller skriv som summa av triangel- och rektangelarea.

... om ni kan den sedan tidigare!

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx = 2\cdot\frac{1+7}{2} = 2\cdot\frac{8}{2} = 8$$

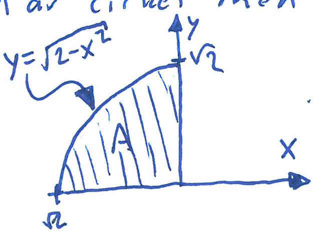
5.4.8 $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2-x^2}\,dx = ?$

Funktionskurvan $y = \sqrt{2-x^2}$ kan skrivas om som

$$y^2 = 2-x^2, \quad y \geq 0$$

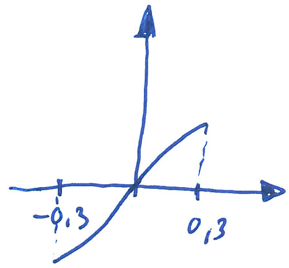
$$x^2+y^2 = 2, \quad y \geq 0$$

Del av cirkel med centrum i $(0,0)$ och radie $\sqrt{2}$

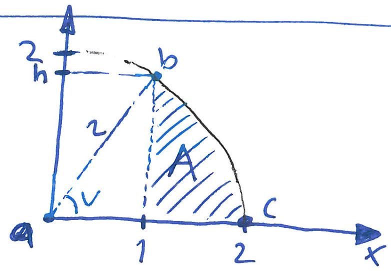


$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\pi\sqrt{2}^2 = \underline{\pi/2}$$

Ex: $\int_{-0,3}^{0,3} \sin(x)\,dx = 0.$ Udda funktion!



5.4.16



$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ är arean A i figuren :

$\cos(v) = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{\pi}{3}$

cirkelsektorn abc i figuren har area $\frac{\pi/3}{2\pi} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{3}$

Från detta subtraherar vi bort triangelarean $\frac{1 \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{4-1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Detta ger

$$A = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Medelvärdessatsen för integraler

för en kontinuerlig funktion $f(x)$ på $[a,b]$

finns u, l på $[a,b]$ så att

$$f(l) = m \le f(x) \le M = f(u) \quad \text{för alla } x \in [a,b]$$

Alltså är

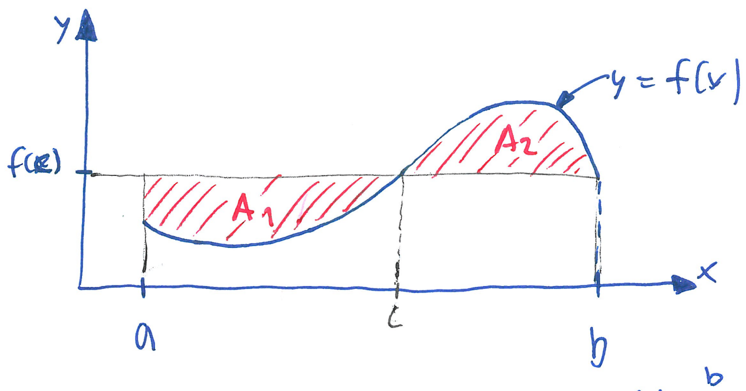
$$f(l)(b-a) = m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = (b-a)M = (b-a)f(u)$$

rektangel area

$$f(l) \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le f(u)$$

Enligt medelvärdessatsen (f kontinuerlig) så finns något c mellan l och u sådant att

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

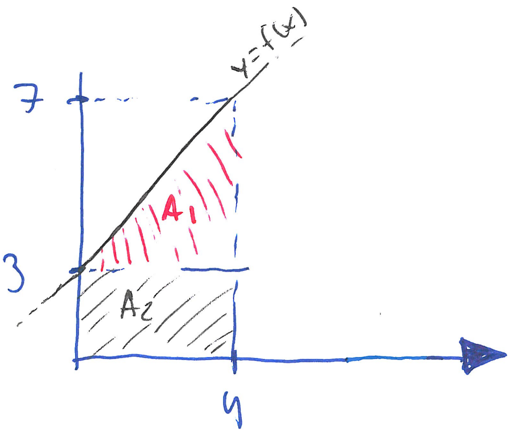


Att rektangelarean $f(c)\cdot(b-a) \overset{(*)}{=} \int_a^b f(x)\,dx$ innebär att $A_1 = A_2$ i figuren, så i den meningen är $f(c)$ ett medelvärde av $f(x)$ på $[a,b]$

Definition 4

För en kontinuerlig funktion f på $[a,b]$ säger vi att f har <u>medelvärdet</u> $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Ex: Vad är medelvärdet av $f(x) = x+3$ på $[0,4]$?



$A_1 = \frac{4\cdot 4}{2} = 8$

$A_2 = 3\cdot 4 = 12$

$$\bar{f} = \frac{1}{4-0}\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}(A_1 + A_2) = \frac{20}{4} = 5$$

Styckvis kontinuerlig funktion

Definition

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ och på $[b,c]$

så definieras integralen

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

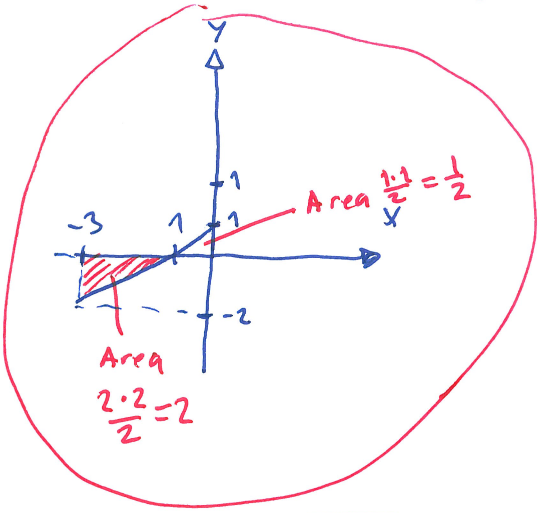
samt motsvarande för fler än två intervall

5.4. 34

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{då } x<0 \\ 2 & \text{då } x>0 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx =$$

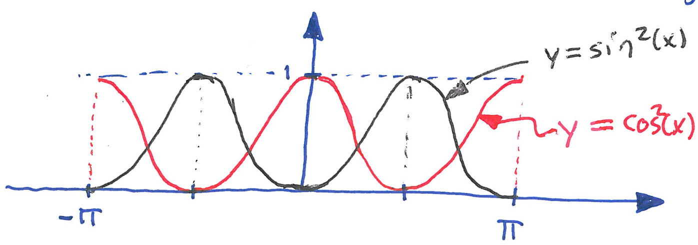
$$= \underbrace{\int_{-3}^{0} (1+x)\,dx}_{\text{Area } \frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}} + \underbrace{\int_{0}^{2} 2\,dx}_{=\text{rektangelarean } 2\cdot 2=4} = 4-\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$



Litet bonusknep som ej finns i boken. Dvs inget ni måste kunna.

Vi kommer att lära oss knep på lektion 23 för att räkna ut $\int \sin^2(x)\,dx$ och $\int \cos^2(x)\,dx$, men för integrering av ett helt antal perioder kan vi redan nu utnyttja att $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin(x-\frac{\pi}{2})$, så att

$\cos^2(x) = \sin^2(x-\frac{\pi}{2}) =$ "$\sin(x)$ translaterad $\frac{\pi}{2}$ radianer åt höger"



Integrerar man över ett helt antal perioder så blir det alltså samma. Till exempel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx,$$

så att

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(\sin^2(x)+\cos^2(x))}_{=1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx}_{=\text{rektangel area}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1 = \pi$$