

Some elementary integrals

$$1. \int 1 dx = x + C$$

$$3. \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$5. \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$7. \int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$9. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$11. \int \frac{\cos(ax)}{\sec^2(ax)} dx = \frac{1}{a} \tan ax + C$$

$$13. \int \sec ax \tan ax dx = \frac{1}{a} \sec ax + C$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$17. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$19. \int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C$$

$$2. \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$4. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$8. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$10. \int \frac{\cos(ax)}{\sin^2(ax)} dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$12. \int \frac{\sin(ax)}{\csc^2(ax)} dx = -\frac{1}{a} \cot ax + C$$

$$14. \int \csc ax \cot ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax + C$$

$$16. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$18. \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} + C$$

$$20. \int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$$

Special fall av 7

a=1

a=1

a=1

Teorem 5, Analysens huvudsats

Låt f vara kontinuerlig funktion på ett intervall som innehåller a .

1) Funktionen $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ är deriverbar och

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dvs } F \text{ primitiv funktion till } f.$$

2) För varje primitiv funktion $G(x)$ till $f(x)$

(dvs $G'(x) = f(x)$) så följer att standard notation

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Exempel först, sedan bevis.

Alla primitiva funktioner vi behöver kunna (jämför sid 318 i boken)

1. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$

3. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$

4. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

5. $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$

6. $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}(x) + C$

8. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

5.5.5 $\int_{-1}^2 3x^2 - 4x + 2 dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = [x^3 - 2x^2 + 2x]_{-1}^2$

$$= 8 - 2 \cdot 4 + 4 - (-1 - 2 - 2) = 4 + 5 = 9$$

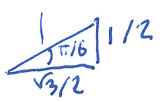
5.5.16 $\int_{-1}^1 2^x dx = \int_{-1}^1 (e^{\ln(2)})^x dx = \int_{-1}^1 e^{\ln(2)x} dx =$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{\ln(2)} \cdot \underbrace{\ln(2) e^{\ln(2)x}}_{\substack{\text{Inrederivat!} \\ = \frac{d}{dx} e^{\ln(2)x}}} dx = \left[\frac{1}{\ln(2)} e^{\ln(2)x} \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{\ln(2)} 2^x \right]_{-1}^1 = \frac{2^1 - 2^{-1}}{\ln(2)} = \frac{3}{2 \ln(2)}$$

2

5.5.9

$$\int_{-\pi/4}^{-\pi/6} \cos(x) dx = \left[\sin(x) \right]_{-\pi/4}^{-\pi/6} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$



5.5.18

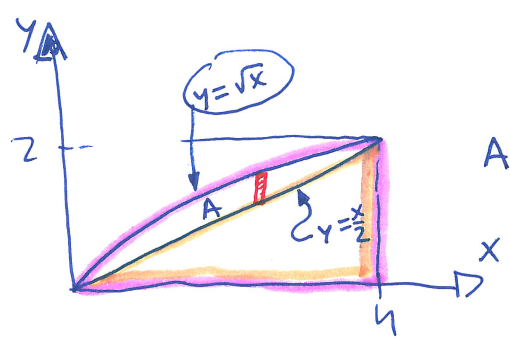
$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\sin^{-1}(x) \right]_0^{1/2} = \sin^{-1}(1/2) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

5.5.26 Beräkna arean mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = \frac{x}{2}$.

Skärningspunkter: $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$

$$0 = \frac{x}{2} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = 0 & \text{ eller } \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0 \\ x = 0 & \text{ eller } \sqrt{x} = 2 \\ & x = 4 \end{aligned}$$



$$A = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_0^4 \frac{x}{2} dx = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx$$

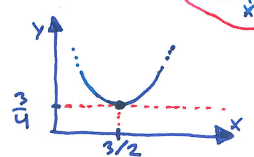
"övre funktionen - undre funktionen"
Så blir det alltid, se rutan mitt på sid 326. (Adams är tyvärr lite virrvarr ibland och ger uppgifter innan han visat hur man löser dem.)

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^4 \left(x^{1/2} - \frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \right]_0^4 =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{4} x^2 \right]_0^4 = \frac{2}{3} \left(4^{3/2} \right) - \frac{1}{4} 4^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 8}{3} - \frac{4 \cdot 3}{3} = \frac{4}{3} \text{ arean heter}$$

Alternativ i uppg 5.5.25:
När ni räknat ut skärningspunkter x_1, x_2 ; kolla för ett x-värde där emellan vilken kurva som är överst.



TIPS för uppgift 5.5.25:

Vill ni snabbt skissa graf för $y = x^2 - 3x + 3$ så kvadratkomplettera:

$$y = x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

5.5.40

$$\frac{d}{dt} \int_t^3 \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{d}{dt} - \int_3^t \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$= - \frac{d}{dt} \int_3^t \frac{\sin(x)}{x} = - \frac{\sin(t)}{t}$$

5.5.42

$$\frac{d}{dx} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du =$$

$$= 2x \cdot \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du + \cancel{x^2} \cdot \frac{\sin(x^2)}{\cancel{x^2}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{inre derivatan!}} =$$

$$= 2x \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du + 2x \sin(x^2)$$

Bevis av Teorem 5

$$1) \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

= f(c) för något c mellan x och x+h enligt Bevis av Teorem 4 från förra lektionen (medelvärdes-satsen).

Eftersom $x \leq c \leq x+h$ så får vi att $c \rightarrow x$ då $h \rightarrow 0$ och f kontinuerlig, så $f(c) \rightarrow f(x)$

Alltså: $F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

2) Om $G'(x) = f(x)$, så är $F(x) = G(x) + C$, för någon konstant C.

Alltså: $\int_a^x f(x) dx = F(x) = G(x) + C$

För $x=a$ fås $0 = G(a) + C$, dvs $C = -G(a)$

För $x=b$ fås då $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$, v.s.v.