L 22 Variabelbyte. (Avsnitt 5.6)

Primitiva funktioner så här långt:

Påminn om nr 1–9 från förra lektionen, motsvarande sid 318 i boken.

En användbar räkneregel för integraler fås från kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$\Updownarrow$ ← Enligt definition av primitiv funktion

$$\int f'(g(x))\,dx = f(g(x)) + C = \int f'(g(x))\, g'(x)\,dx$$

Som en minnesregel kan man införa $u = g(x)$ och formellt skriva om $\frac{du}{dx} = g'(x)$ till $du = g'(x)\,dx$.

Variabelbyte

$$\boxed{\int h(g(x))\, g'(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \end{bmatrix} = \int h(u)\,du}$$

Jag införde funktionen $h(u) = f'(u)$ här, för det har ingen betydelse i fortsättningen att h skall vara derivatan av någon funktion

Denna kan användas för att räkna ut 5.6.11 (skriv om täljaren i 5.6.11 rätt så kan nedanstående utnyttjas), så jag visar den, men efter att ha visat några enklare uppgifter från nästa sida

Uppg. 5.6.17

$$\int \frac{1 \cdot e^{-x}}{(e^x+1)\cdot e^{-x}}\,dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \begin{bmatrix} u = 1+e^{-x} \\ du = -e^{-x}dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(|u|) + C$$

$$= -\ln(|1+\underbrace{e^{-x}}_{>0}|) + C = \underline{-\ln(1+e^{-x}) + C}$$

2

5.6.2

$$\frac{1}{a}\int \cos(ax+b)\,a\,dx = \begin{bmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{a}\sin(u) + C$$

$$= \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

5.6.4

$$\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{2x} \\ du = 2e^{2x}\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{1}{2}\cos(e^{2x}) + C$$

5.6.10

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\tan^2(x)}}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \begin{bmatrix} u = \tan(x) \\ du = \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \sin^{-1}(u) + C = \sin^{-1}(\tan(x)) + C$$

5.6.12

$$\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \begin{bmatrix} u = \ln(t) \\ du = \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln(t))^2}{2} + C$$

5.6.16

$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{2+x^6}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^3 \\ du = 3x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1\sqrt{2}}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,du$$

$$= \begin{bmatrix} v = \frac{u}{\sqrt{2}} \\ dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\,du \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}(v) + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Räcker egentligen att veta att

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}(x) + C \quad \text{an} \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x)$$

ty då kan man även räkna ut

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = a\cdot\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x/a \\ du = \frac{1}{a}\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}(u)+C = \underline{\underline{\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C}}$$

och, för $a>0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \frac{x}{a} \\ du = \frac{1}{a}\,dx \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \sin^{-1}(u)+C = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

För integrering av $\cos^2(x)$ och $\sin^2(x)$ kan man använda att

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Ex 9

$$\int \sin^4(x)\,dx = \int (\sin^2(x))^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx$$

Inre derivata!

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3}{2}\,dx + \frac{1}{4}\int \underbrace{\cos(2x)\cdot 2}_{=\frac{d}{dx}\sin(2x)}\,dx + \frac{1}{4\cdot 8}\int \underbrace{\cos(4x)\cdot 4}_{=\frac{d}{dx}(\sin(4x))}\,dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

(4)

5.6.46

Beräkna arean begränsad av

$$y = \frac{x}{x^2+16}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=2$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+16}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2+16 \\ du = 2x\,dx \\ x=0 \Rightarrow u=16 \\ x=2 \Rightarrow u=20 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_{16}^{20} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\left[\ln(|u|)\right]_{16}^{20} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(20) - \ln(16)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{20}{16}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) \text{ areaenheter}$$

Ibland är kvadratkomplettering bra att ha:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-(x^2-x)}}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2)}}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})}}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx = \begin{bmatrix} u = x-\frac{1}{2} \\ du = dx \\ x=-1 \Rightarrow u=-\frac{3}{2} \\ x=2 \Rightarrow u=\frac{3}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-u^2}}\,du = \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}(1-\frac{4}{9}u^2)}}\,du = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1-(\frac{2}{3}u)^2}}\,du = \begin{bmatrix} v = \frac{2}{3}u \\ dv = \frac{2}{3}\,du \\ u=-\frac{3}{2} \Rightarrow v=-1 \\ u=\frac{3}{2} \Rightarrow v=1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \left[\sin^{-1}(v)\right]_{-1}^{1} = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\pi}}$$