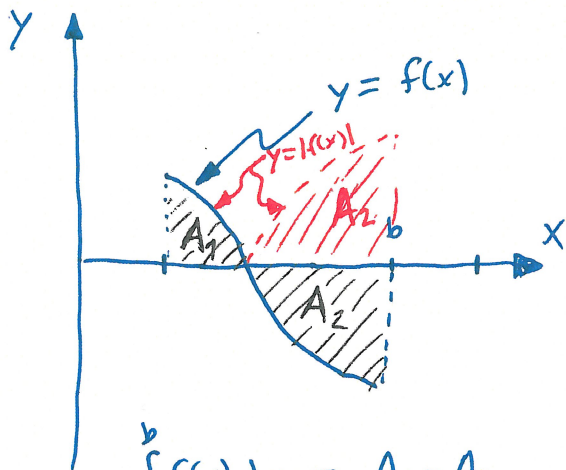


L23 Area av yta (Adams avsnitt 5.7)

Kom ihåg: Integral ger arean mellan kurva och x-axel.

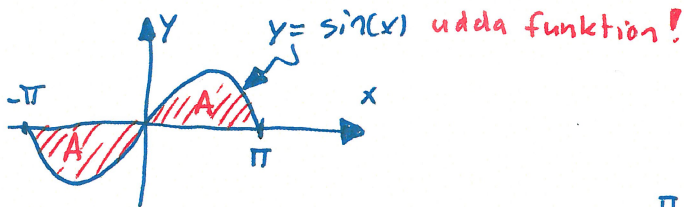


$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2$$

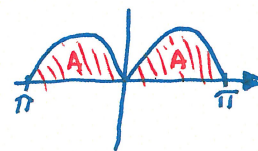
Vill man räkna ut $A_1 + A_2$ så tag absolutbeloppet:

$$\int_a^b |f(x)| dx =$$

Ex:

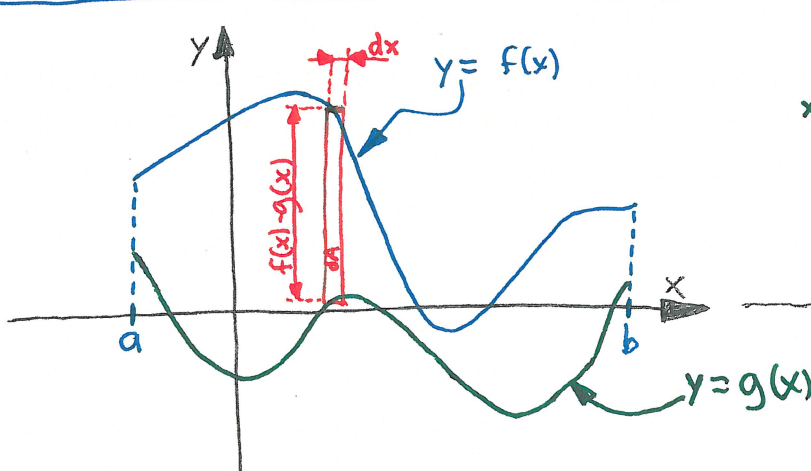


$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = A - A = 0 \text{ areaenheter}$$



$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx &= 2 \int_0^{\pi} |\sin(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \\ &= 2 \cdot [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2 \cdot (-(-1) - (-1)) = \\ &= 2 \cdot 2 = 4 \text{ areaenheter} \end{aligned}$$

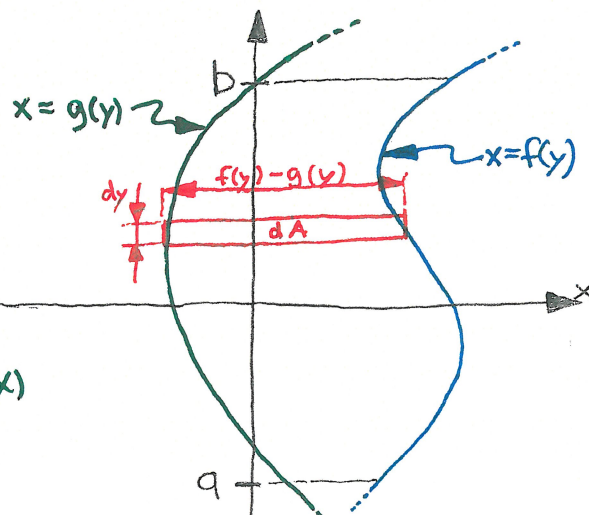
Area mellan två kurvor i ett intervall [a,b]



Arean = "summa av rektangelareor"

$$dA = (f(x) - g(x)) dx$$

$$\text{Arean} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$dA = (f(y) - g(y)) dy$$

$$\text{Arean} = \int_a^b (f(y) - g(y)) dy$$

② Uppg. 5.7.4

Bestäm arean mellan kurvorna $y = x^2 - 2x = f(x)$ och $y = 6x - x^2 = g(x)$

Skärningspunkt: $x^2 - 2x = 6x - x^2$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x = 4$$

↓

$$y = 0$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

↓

$$y = 16 - 2 \cdot 4 = 8$$

$$(x, y) = (4, 8)$$

Vilken är överst? Samma i hela intervallet $0 < x < 4$, så sätt t ex in $x = 2$.
 $f(2) = 4 - 4 = 0$ $g(2) = 12 - 4 = 8$ g överst!

Arean mellan kurvorna blir då

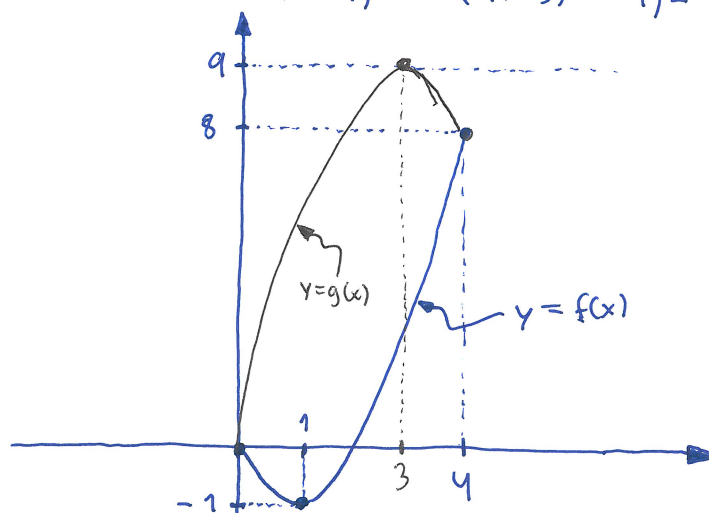
$$A = \int_0^4 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx =$$

$$= \left[8 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^4 = 64 - \frac{2}{3} \cdot 64 = 64 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{64}{3} \text{ areaenheter}$$

Klart! ... men ibland kanske man vill skissa upp funktionskurvor också, och för andragradspolynom gör kvadratkomplettering detta enklare:

$$f(x) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1$$

$$g(x) = -(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9) = -((x - 3)^2 - 9) = 9 - (x - 3)^2$$



5.7.6 Beräkna arean mellan $x-y=7$ och $x=2y^2-y+3$ Enklast här att se x som funktion av. ③

$$x = 7+y = f(y) \quad x = 2y^2 - y + 3 = g(y)$$

Vart korsar funktionskurvorna varandra?

$$f(y) = g(y)$$

$$7+y = 2y^2 - y + 3$$

$$0 = 2y^2 - 2y - 4 = 2(y^2 - y - 2)$$

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$y = -1 \text{ eller } y = 2$$

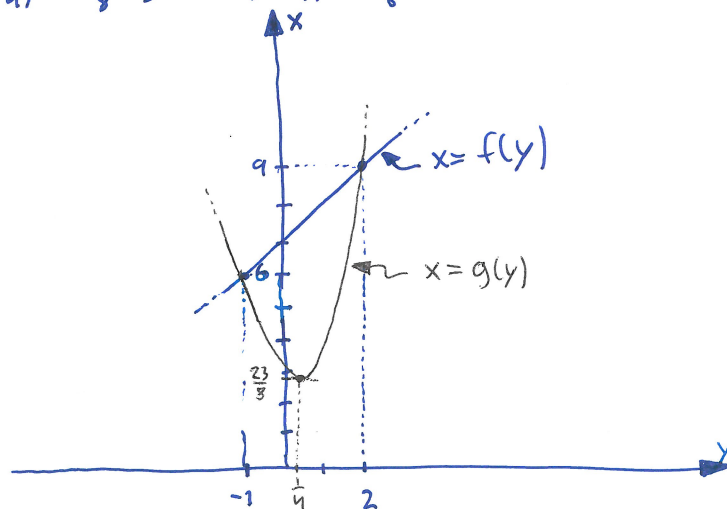
Vilken av kurvorna ligger överst för $-1 < y < 2$?

Samma i hela intervallet, ty kontinuerliga kurvor. Vi har till exempel $g(1) = 4$ och $f(1) = 8 > g(1)$, så f är överst (om man vrider så x -axeln pekar uppåt) och arean mellan kurvorna är

$$A = \int_{-1}^2 (f(y) - g(y)) dy = \int_{-1}^2 (7+y - (2y^2 - y + 3)) dy = \int_{-1}^2 (-2y^2 + 2y + 4) dy$$
$$= \left[-2 \cdot \frac{y^3}{3} + \cancel{2} \cdot \frac{y^2}{2} + 4y \right]_{-1}^2 = -\frac{2}{3} \cdot 8 + 4 + 8 - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-1) + 1 - 4 \right) =$$

$$= -\frac{16}{3} + 12 - \frac{2}{3} + 3 = -\frac{18}{3} + 15 = -6 + 15 = \underline{\underline{9 \text{ areaenheter}}}$$

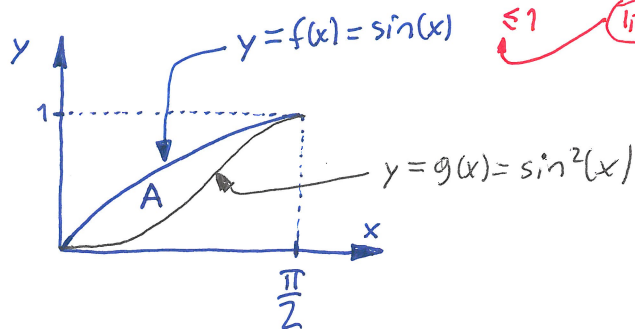
$$g(y) = 2(y^2 - \frac{1}{2}y) + 3 = 2(y^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot y + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}) + 3 = 2(y - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + 3 =$$
$$= 2(y - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 3 = 2(y - \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{8}$$



4) 5.7.19

sökt: Arean begränsad av $y = \sin(x) = f(x)$ och $y = \sin^2(x) = g(x)$, $x=0$ och nästa skärningspunkt till höger.

För $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ är $g(x) = \sin^2(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\geq 0} \underbrace{g(x)}_{\leq 1}$, så $0 \leq g(x) \leq f(x) \leq 1$



$$A = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\pi/2} (\sin(x) - \sin^2(x)) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\cos(2x)}_{= \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\sin(2x))} \right) dx = \left[-\cos(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -0 - \frac{\pi}{4} + 0 - (-1 - 0 + 0) = \underline{\underline{1 - \frac{\pi}{4} \text{ areanheter}}}$$