L25-26 Partiell integration. Integration av rationella funktioner

Adams avsnitt 6.1–6.2

Derivata av produkt:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) - f'(x)g(x)$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}(f(x)g(x) - f'(x)g(x))\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Alltså har vi

Partiell integration (integration by parts)

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

eller motsvarande för bestämda integralen:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \underbrace{\left[f(x)\,g(x)\right]_a^b}_{\text{"plockat bort ett prim-tecken" här...}} - \int_a^b \underbrace{f'(x)\,g(x)}_{\text{... och fly that det till andra funktionen här.}}\,dx$$

Ex

- $\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} - \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\,dx = x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx =$

  $= x\ln(x) - x + C$

- $\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx = -x^2\cos(x) + 2\int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)}\,dx =$

  $= -x^2\cos(x) + 2\left(\underbrace{x \cdot \sin(x)}_{u(x)\cdot v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\,dx\right)$

  $= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$

- $\int \underbrace{x}_{g'(x)} \underbrace{\tan^{-1}(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\tan^{-1}(x)}_{f(x)} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f'(x)}\,dx =$

  $= \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

  $= \frac{x^2}{2} \cdot \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C$

  $= \frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{x}{2} + C$

- $\int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\sin^{-1}(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin^{-1}(x)}_{f(x)} - \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{f'(x)}\,dx = \left[\begin{matrix} u = 1-x^2 \\ du = -2x\,dx \end{matrix}\right] =$

  $= x \cdot \sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}\int \overbrace{\frac{1}{\sqrt{u}}}^{=u^{-\frac{1}{2}}}\,du = x \cdot \sin^{-1}(x) + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{\cancel{1/2}} + C = x \cdot \sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

Tjänar inget till att byta $g(x)$ mot $g(x)+C$ här, ty det blir samma sak:

$f(x)\cdot(g(x)+C) - \int f'(x)\cdot(g(x)+C)\,dx = f(x)g(x) + \underbrace{f(x)\cdot C - \int f'(x)\cdot C\,dx}_{=0+C_2} - \underbrace{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx}_{\text{ger <primitiv funktion>} + C_3}$

och sen slår man ihop $C_2 + C_3 = C$, så därför brukar man vänta med "+C" till sista $\int \cdots dx$ är uträknad.

② Ex 4

Ibland kan man få ursprungliga integralen att dyka upp på nytt som en del av högerledet:

$$I=\int \underbrace{e^{ax}}_{f(x)}\, \underbrace{\cos(bx)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{e^{ax}}_{f(x)}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{b}\sin(bx)}_{g(x)} - \int \underbrace{a e^{ax}}_{f'(x)}\cdot \underbrace{\tfrac{1}{b} \sin(bx)}_{g(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax}\cdot\sin(bx) - \frac{a}{b} \int \underbrace{e^{ax}}_{u(x)}\,\underbrace{\sin(bx)}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax}\cdot\sin(bx) - \frac{a}{b}\left(\underbrace{e^{ax}}_{u(x)}\cdot\underbrace{(-\tfrac{1}{b}\cos(bx))}_{v(x)} - \int \underbrace{a e^{ax}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{(-\tfrac{1}{b}\cos(bx))}_{v(x)}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax}\cdot\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

$$I = \frac{1}{b} e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}I + C_1$$

$$I\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot b^2 = \left(\frac{1}{b} e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) + C_1\right)\cdot b^2$$

$$I = \frac{b e^{ax}\sin(bx) + a e^{ax}\cos(bx)}{b^2+a^2} + C$$

Ex $\int \underbrace{x}_{f(x)}\, \underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)}\, \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx = xe^x - e^x + C$ (*)

Man kan använda samma teknik för att räkna ut $\int x^n e^x\,dx$ genom att steg för steg minska gradtalet med 1 (från x^n till x^{n-1} till x^{n-2} till --- till x^0.

$$I_n = \int \underbrace{x^n}_{f(x)}\, \underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^n}_{f(x)}\, \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{n x^{n-1}}_{f'(x)}\, \underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I_n = x^n e^x - n I_{n-1} \quad \text{och} \\ I_0 = \int x^0 e^x\,dx = e^x + C \end{array}}$$

En sån här lösning kallas rekursionsformel eller (på Engelska) reduction formula.

Ger till exempel att

$I_0 = e^x + C$

$I_1 = xe^x - I_0 = xe^x - e^x - C$ (som i (*))

$I_2 = x^2e^x - 2I_1 = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C_2$

$I_3 = x^3e^x - 3I_2 = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C_3$

$I_4 = x^4e^x - 4I_3 = x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x + C_4$

o sv...

6.1.9 (Enklare med "inverse sine substitution", men det lär vi oss först i avsnitt 6.3.)

$$\int \underset{f'(x)}{x}\cdot \underset{g(x)}{\sin^{-1}(x)}\,dx = \underset{f(x)}{\frac{x^2}{2}}\cdot \underset{g(x)}{\sin^{-1}(x)} - \int \underset{f(x)}{\frac{x^2}{2}}\cdot \underset{g'(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\text{kalla denna } I} = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}\cdot I \quad (*)$$

Där vi har

$$I = \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = -\sin^{-1}(x) + \int \underset{f'(x)}{1}\cdot\underset{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$I = -\sin^{-1}(x) + \underset{f(x)}{x}\cdot\underset{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \int \underset{f(x)}{x}\cdot \underset{g'(x)}{\frac{1}{\cancel{2}}\frac{-\cancel{2}x}{\sqrt{1-x^2}}}\,dx = -\sin^{-1}(x) + x\cdot\sqrt{1-x^2} - \underbrace{\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{=I}$$

$$2I = -\sin^{-1}(x) + x\sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$I = -\frac{1}{2}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C_2 \text{ insättes i } (*)$$

$$\int x\cdot\sin^{-1}(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}(x) - \frac{1}{4}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$$

SVAR: $\boxed{\int x\cdot\sin^{-1}(x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin^{-1}(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C}$

④ PARTIALBRÅKSUPPDELNING OCH INTEGRATION AV RATIONELLA FUNKTIONER

För rationella funktioner $\frac{P(x)}{Q(x)}$ där P har lägre gradtal än Q och Q har grad högst 2 kan vi räkna ut primitiv funktion:

- $\frac{1}{a}\int \frac{1}{ax+b}a\,dx = \begin{bmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{a}(\ln(|u|)+C = \frac{1}{a}\ln(|ax+b|)+C$

För $a \geq 0$ kan vi med kvadratkomplettering och variabelbyte skriva om $Q(x)$ av grad 2 som följer:

- $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 \pm a}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \pm a \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C = \frac{1}{2}\ln(|x^2 \pm a|)+C$
- $\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{a}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1}\frac{1}{\sqrt{a}}\,dx = \begin{bmatrix} u = \frac{x}{\sqrt{a}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{a}}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}(u)+C = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{a}})+C$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = ?$

Hinns kanske ej med på lektion?

För att lösa detta försöker vi hitta konstanter A och B sådana att

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{(x+a)A}{(x+a)(x-a)} + \frac{B(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x+a)(x-a)} = \frac{(A+B)x+(A-B)a}{x^2-a^2}$$

För att samma täljare längst till höger som i $\frac{1}{x^2-a^2}$ så måste

$$0x + 1 = (A+B)x + (A-B)a$$

Krävs alltså att

$$\begin{cases} A+B=0 \\ (A-B)a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2Aa = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2a},\ B = -\frac{1}{2a}.$$

Alltså är

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2a}}{x-a} - \frac{\frac{1}{2a}}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a}\left(\ln(|x-a|) - \ln(|x+a|) \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) + C$$

Tekniken att dela upp i en summa av termer med förstagradspolynom i nämnaren kallas partialbråksuppdelning funkar alltid när täljaren har lägre gradtal än nämnaren och nämnaren kan skrivas som produkt $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ med $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olika. Några exempel:

6.2.10 $I = \int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx = ?$

För att faktorisera nämnaren kollar vi först nollställen:

$$3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}+1} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}$$

$x = -3$ eller $x = \frac{1}{3}$

Alltså är $3x^2+8x-3 = 3(x^2+\frac{8}{3}x-1) = 3(x-\frac{1}{3})(x+3) = (3x-1)(x+3)$

Det finns två vanliga sätt att göra partialbråksuppdelning:

1) Som på förra sidan. Vi söker A och B sådana att

$$\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{(x+3)A}{(x+3)(3x-1)} + \frac{B(3x-1)}{(x+3)\cdot(3x-1)} = \frac{Ax+3A+3Bx-B}{(x+3)(3x-1)} = \frac{(A+3B)x+3A-B}{(3x-1)(x+3)}$$

krävs alltså att

$$\begin{cases} A+3B=1 & (*) \\ 3A-B=0 \end{cases} \Rightarrow B=3A, \text{ insättning i } (*) \text{ ger}$$

$$A+9A=1$$

$$A=\frac{1}{10} \text{ och } B=3A=\frac{3}{10}, \text{ dvs}$$

$$\boxed{\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{\frac{1}{10}}{3x-1} + \frac{\frac{3}{10}}{x+3}} \quad (\square)$$

2) "Handpåläggning"

$$\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+3}$$

i) Multiplicera VL och HL med $3x-1$ och sätt $x=\frac{1}{3}$:

$$\frac{x}{x+3} = A + \frac{B(3x-1)}{x+3} \quad \text{sätt } x=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 3}{(\frac{1}{3}+3)\cdot 3} = A + 0$$

ii) Multiplicera VL och HL med $x+3$ och sätt $x=-3$:

$$\frac{x}{3x-1} = \frac{A(x+3)}{3x-1} + B \quad \text{sätt } x=-3$$

$$\frac{3}{10} = \frac{-3}{-10} = 0 + B$$

Detta ger återigen $(\square)$.

När partialbråksuppdelningen $(\square)$ är gjord kan vi räkna ut integralen:

$$\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{1}{3x-1}\,dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\ln(|3x-1|) + \frac{3}{10}\ln(|x+3|) + C$$

SVAR:

$$\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx = \frac{1}{30}\ln(|3x-1|) + \frac{3}{10}\ln(|x+3|) + C$$

⑥ Om gradtalet inte är mindre i täljaren så kan detta fixas med polynomdivision

Exempel 4 $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = ?$

I enklare fall som detta kan man göra polynomdivisionen med enkel omskrivning av täljaren:

$$\frac{x^3+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x+x+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x}{x^3-x} + \frac{x+2}{x^3-x} = 1 + \frac{x+2}{x(x^2-1)}$$

$$= 1 + \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Handpåläggning ger:

$$A = \frac{0+2}{(-1)\cdot 1} = -2$$

$$B = \frac{1+2}{1\cdot(1+1)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{-1+2}{(-1)\cdot(-1-1)} = \frac{1}{2}$$

Alltså är

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = \int\left(1 - 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x - 2\ln(|x|) + \frac{3}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C$$

6.2.16 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+7x+12}\,dx = ?$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 7 \\
x^2+7x+12 & x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
 & -(x^3 + 7x^2 + 12x \quad) \\
\hline
 & -7x^2 - 12x + 1 \\
 & -(-7x^2 - 49x - 84) \\
\hline
 & 37x + 85
\end{array}$$

vi har alltså att

$$\frac{x^3+1}{x^2+7x+12} = x-7 + \frac{37x+85}{\underbrace{x^2+7x+12}_{=0 \text{ då } x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12} = \frac{-7\pm1}{2}}} = x+7 + \frac{37x+85}{(x+4)(x+3)}$$

$x=-4$ eller $x=-3$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{37x+85}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+3}$$

Handpåläggning ger:

$$A = \frac{-37\cdot4+85}{-4+3} = \frac{-148+85}{-1} = \frac{-63}{-1} = 63$$

$$B = \frac{-37\cdot3+85}{-3+4} = -111+85 = -26$$

Alltså är

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+7x+12}\,dx = \int\left(x-7+\frac{63}{x+4}-\frac{26}{x+3}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 7x + 63\ln(|x+4|) - 26\ln(|x+3|) + C$$

Då täljaren har en faktor $(x-a)^m$ funkar också partialbråksuppdelning, men då ger den faktorn termerna $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$

<u>Exempel 7</u> $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = ?$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 A}{(x-1)^2 x} + \frac{x(x-1)\,B}{x(x-1)(x-1)} + \frac{x\cdot C}{x\cdot(x-1)^2} = \frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2-(2A+B-C)x+A}{x(x-1)^2}$$

Alltså: $A=1$

$A+B=0 \Rightarrow B=-A=-1$

$2A+B-C=0 \Rightarrow C=2A+B=2-1=1$

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx =$$

$$= \ln(|x|) - \ln(|x-1|) + \frac{(x-1)^{-1}}{(-1)} + C$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x}{x-1}\right|\right) - \frac{1}{x-1} + C$$

(8) Då täljaren innehåller faktorer $(x^2+bx+c)^n$, heltal $n \geq 1$ så funkar också partialbråksuppdelning, men då ger den faktorn termerna

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Exempel 8

$$\frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} = \frac{(2x+1)^2 A}{(2x+1)^2 \cdot x} + \frac{x\cdot(2x+1)\cdot(Bx+C)}{x\cdot(2x+1)(2x^2+1)} + \frac{(Dx+E)\cdot x}{(2x^2+1)^2\cdot x} =$$

$$= \dots = \frac{A(4x^4+4x^2+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{x(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(4A+2B)x^4 + 2Cx^3 + (4A+B+D)x^2 + (C+E)x + A}{x(2x^2+1)^2}$$

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-4 \\ C=0 \\ D=-3 \\ E=0 \end{array}$$

Alltså är

$$\int \frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{4x}{2x^2+1} - \frac{3x}{(2x^2+1)^2}\right)dx$$

$$= 2\ln(|x|) - \int \left(\frac{\frac{1}{4}4x}{2x^2+1} + \frac{\frac{1}{4}3x}{(2x^2+1)^2}\right)4\,dx = \begin{bmatrix} u=2x^2+1 \\ du=4x \end{bmatrix} =$$

$$= 2\ln(|x|) - \int \left(\frac{1}{u} + \frac{3}{4}\frac{1}{u^2}\right)du =$$

$$= 2\ln(|x|) - \ln(|u|) - \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{u}\right) + C =$$

$$= \ln(|x^2|) - \ln(|2x^2+1|) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+1} + C$$

$$= \ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+1}$$

Se Teorem 1, sid 345 för sammanfattning av hur man gör partialbråksuppdelning.

Sammanfattning

Notera att en "x-term" i täljaren inte skulle tillföra något:
$\frac{Bx+C}{(x-a)^2} = \frac{Bx-Ba+BaC}{(x-a)^2} = \frac{B\cancel{(x-a)}}{(x-a)^{\cancel{2}}} + \frac{Ba+C}{(x-a)^2} = \frac{B}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2}$,
med $B_2 = Ba+C$.

Faktor i nämnaren	Ger i ansats upphov till termen
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^2$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
$(x-a)^n$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^2$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}$
$(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Exempel på ansatser

- x^2+5x+7 kan ej faktoriseras till $x^2+5x+7 = (x-a)(x-b)$ med reella konstanter, ty $x^2+5x+7=0$ har ingen reellvärd lösning (försöker man med pq-formeln så får man $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 7} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{25}{4} - \frac{28}{4}}_{\text{Negativt!}}}$).

  Vi får därför ansatsen

  $$\frac{5x^2}{(x^2+5x+7)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+5x+7} + \frac{C}{x+1}$$

- $$\frac{-x^2-5}{(x^2+5x+7)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+5x+7} + \frac{Cx+D}{(x^2+5x+7)^2} + \frac{E}{x+1}$$

- $$\frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

- $$\frac{x^2+3x+4}{(x-3)^2(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+7}$$

- $$\frac{1}{(x^4-1)} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Efter att ha räknat ut A, B, C och D kan man utnyttja att $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln(|x-1|)+C_1$, $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(|x+1|)+C_2$, $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\begin{matrix} u=x^2+1 \\ du=2x\,dx \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C_3 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_3$
och $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}(x)+C_4$