

L28 Generaliserad integral (Adams 6.5)

1

Definition 1

För f kontinuerlig på $[a, \infty)$ och g kontinuerlig på $(-\infty, b]$ så definierar vi

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^b g(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b g(x) dx.$$

Man säger att integralen divigerar om gränsvärdet blir $\pm \infty$ och att integralen konvergerar om gränsvärdet finns och är ett tal.

6.5.2

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_3^R \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x-1 \\ du = 2 dx \\ x=3 \Leftrightarrow u=5 \\ x=R \Leftrightarrow u=2R-1 \end{array} \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_5^{2R-1} u^{-2/3} du =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{3 \cdot u^{1/3}}{3 \cdot 1/3} \right]_5^{2R-1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(\underbrace{\sqrt[3]{2R-1}}_{\rightarrow \infty} - \sqrt[3]{5} \right) = \infty.$$

Integralen divergerar alltså.

För f kontinuerlig på hela reella tallinjen \mathbb{R} skriver vi

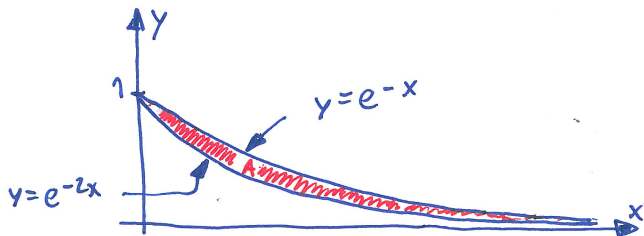
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

6.5.22

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{R_1 \rightarrow -\infty} \int_{R_1}^0 e^x dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} e^{-x} dx = \lim_{R_1 \rightarrow -\infty} (e^0 - \overset{\rightarrow 0}{e^{R_1}}) + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} (\overset{\rightarrow 0}{e^{-R_2}} + e^0) = 2$$

6.5.24 Sökt: Areal under $y=e^{-x}$, över e^{-2x} och till höger om $x=0$.



$$A = \int_0^R (e^{-x} - e^{-2x}) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R (e^{-x} - e^{-2x}) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^R =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-e^{-R}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-2R}}_{\rightarrow 0} + e^0 - \frac{1}{2} e^0 \right) = \frac{1}{2} \text{ areeenhet.}$$

2

Definition 2

Om f är kontinuerlig på $(a, b]$ och g är kontinuerlig på $[a, b)$ så definierar vi

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx \quad \text{och} \quad \int_a^b g(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx$$

Även här säger vi att integralen konvergerar om gränsvärdet finns och är ändligt och att den divergerar om gränsvärdet är $\pm \infty$.

6.5.7

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx = \begin{matrix} u=1-x \\ du=-dx \\ x=0 \Leftrightarrow u=1 \\ x=c \Leftrightarrow u=1-c \end{matrix} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_1^{1-c} u^{-1/3} du = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left[\frac{u^{2/3}}{2/3} \right]_1^{1-c} \\ = \frac{3}{2} \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(\underbrace{(1-c)^{2/3}}_{\rightarrow 0^+} - 1 \right) = \frac{3}{2}$$

Ex 6 $\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\int_c^1 \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g(x)} dx \right) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left([x \ln(x)]_c^1 - \int_c^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(0 - \underbrace{c \ln(c)}_{\rightarrow 0} - [x]_c^1 \right) = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-1 + c) = -1$

Teorem 3

Om $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f, g kontinuerliga på (a, b) och $f(x) \leq g(x)$, så är

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Bewis För $a < r < s < b$ vet vi sedan tidigare att

$$\int_r^s f(x) dx \leq \int_r^s g(x) dx$$

Tar vi gränsvärde då $r \rightarrow a^+$ och $s \rightarrow b^-$ så får vi Teorem 3. v.s.u.

6.5.32 Avgör om integralen $\int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} dx$ konvergerar eller divergerar.

Integranden är $\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{x^{3/2}}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$, uppför sig ungefär som $\frac{1}{\sqrt{x}}$ för stora x , och $\rightarrow 1$ då $x \rightarrow \infty$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R x^{-1/2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_2^R = \lim_{R \rightarrow \infty} 2(\sqrt{R} - \sqrt{2}) = \infty$$

Vi kan då använda Teorem 3 :

$$\text{Eller enklare: } \frac{1}{1-x^2} \geq 1$$

(3)

$$\text{Eftersom } \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}_{\substack{\text{avtagande} \\ \text{funktion av } x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

då $x \geq 2$

$$\text{Så är } \int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} dx \geq \frac{4}{3} \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \infty,$$

$$\text{Så } \int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} dx \text{ divergerar.}$$

6.5.34 Avgör om $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx$ konvergerar eller divergerar.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx = I_1 + I_2, \text{ där}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x}+x^2}_{\leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{c}) = 1$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x}+x^2}_{\leq \frac{1}{x^2}}} dx \leq \int_1^{\infty} x^{-2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{R} + 1\right) = 1$$

Både I_1 och I_2 konvergerar. Alltså konvergerar även I .