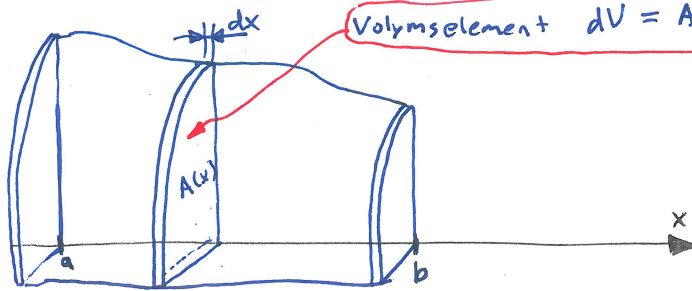


L30 Rotationsvolym område i rummet

(Adams 7.1-7.2)

①

För volymer som kan skivas upp i tvärsnitt med area $A(x)$ kan volymen skrivas som integral

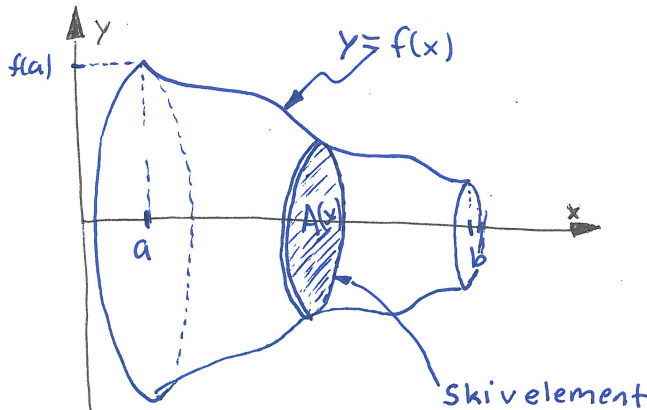


Volymselement $dV = A(x) dx$

skrivs som integral

$$V = \int A(x) dx$$

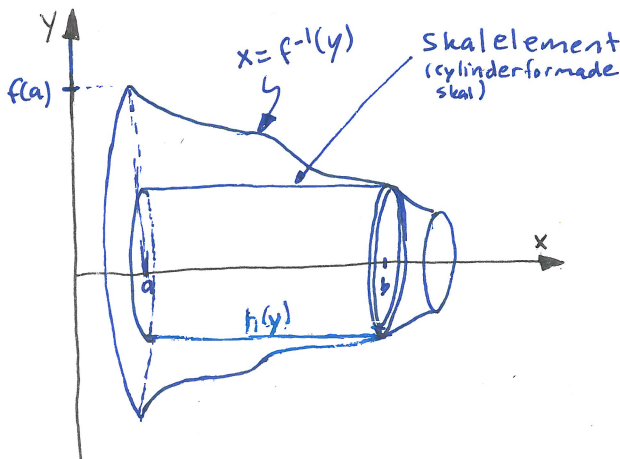
Vanligt exempel: Rotera kurva $y = f(x)$ runt x -axeln



Rotationsvolym

$$A(x) = \pi \cdot (f(x))^2$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

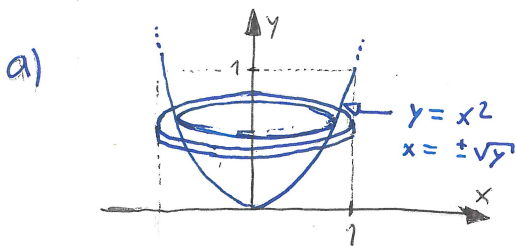


Kan ses som en plåtbit med tjocklek dy hoprullad till cylinder med radie $f^{-1}(y)$ och omkrets $2\pi f^{-1}(y)$, samt bredd $h(y) (= f^{-1}(y) - a$ i figuren).

snittar man upp och rullar ut skalet så fås ett rätblock med volym

$$dV = 2\pi f^{-1}(y) \cdot h(y) \cdot dy$$

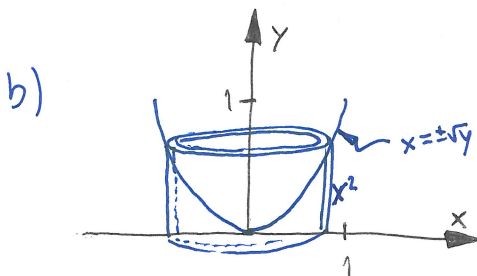
7.1.2 Använd a) skivelement b) skalelement för att beräkna volymen som fås genom rotation runt y -axeln av arean begränsad av $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$



$$A(y) = \pi 1^2 - \pi x^2 = \pi (1 - y)$$

$$V = \int_0^1 \pi (1 - y) dy = \pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \text{ volymenheter}$$



$$dV = 2\pi x \cdot x^2 dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ volymenheter.}$$

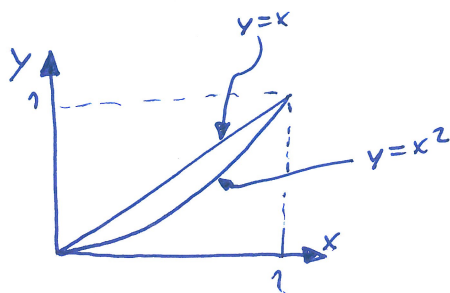
②

7.1.6 Låt R vara arean begränsad av $y=x$ och $y=x^2$
Beräkna volymen som fås då

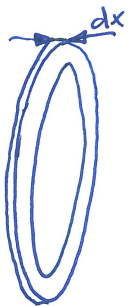
a) R roteras runt x -axeln

b) R roteras runt y -axeln

Lösning:



a)



Skivelement med area

$$A(x) = \pi x^2 - \pi x^4$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15} \text{ volymenheter}$$

b)



Skivelement med area

$$A(y) = \pi \sqrt{y}^2 - \pi y^2$$

$$V = \pi \int_0^1 (y - y^2) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \text{ volymenheter.}$$

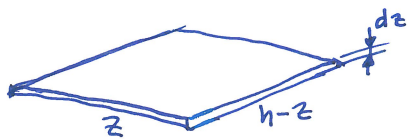
Andra volymräkningar med skivelement

7.2.2

Givet: En kropp har höjd h och tvärsnittet på höjd z är en rektangel med sidor z och $h-z$.

Sökt: Kroppens volym V

Volymelement på höjd z



$$dV = z \cdot (h-z) \cdot dz$$

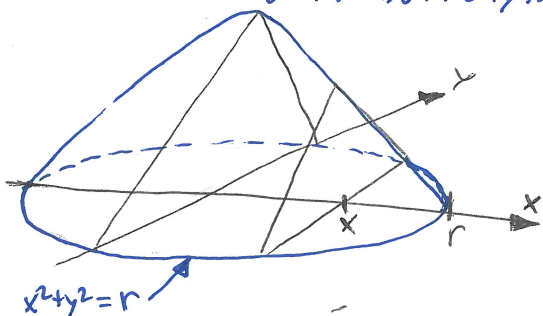
$$V = \int dV = \int_0^h z \cdot (h-z) dz = \int_0^h (hz - z^2) dz = \left[h \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{6} \text{ volymenheter}$$

7.2.12

Givet: För en kropp med cirkulär bottenarea ^{med radie r} är alla tvärsnitt vinkelräta mot en viss diameter liksidiga trianglar.

Sökt: Kroppens volym

Lösning: Vi placerar x -axeln vinkelrät mot triangelarnas och i bottenytan



Tvärsnittet vid x är en liksidig triangel med sidan $2y = 2\sqrt{r^2-x^2}$ och höjden $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2y$



$$A(x) = \frac{2y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2y}{2} = \sqrt{3} y^2 = \sqrt{3} (r^2 - x^2)$$

$$dV = \sqrt{3} (r^2 - x^2) dx$$

Eller p.g.g. symmetri
 $V = 2\sqrt{3} \int_0^r (r^2 - x^2) dx$

$$V = \sqrt{3} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \sqrt{3} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r$$

$$= \sqrt{3} \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} r^3$$

$$V = \frac{4}{\sqrt{3}} r^3 \text{ volymenheter}$$