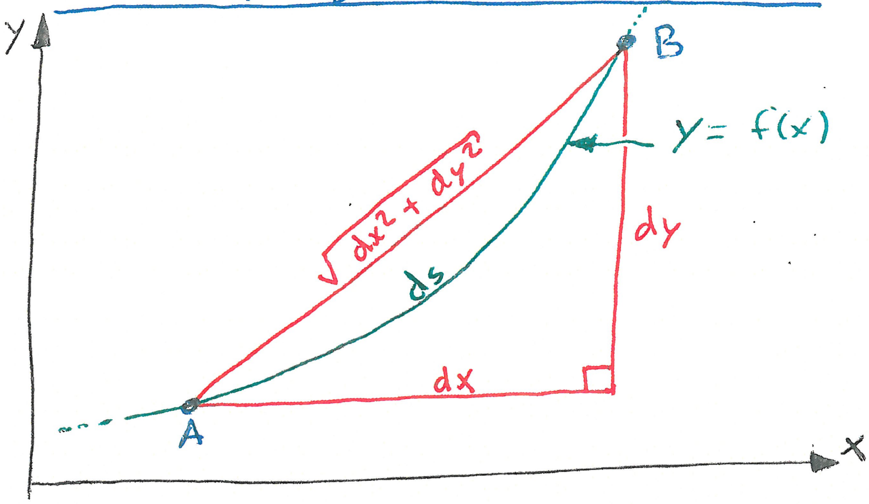
L31-32 Båglängd och rotationsyta Adams 7.3



Mellan A och B har kurvan $y=f(x)$ längd

$$ds \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Då $dx \to 0$ får vi (mer noggrant med Riemannsumma s.405) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ och

Båglängd = längden på kurvan.

> **Båglängden** för kurvan $y=f(x)$ från $x=a$ till $x=b$ är
>
> $$s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

7.3.4 Finn längden S av kurvan $y^2=(x-1)^3$ från $(1,0)$ till $(2,1)$

$y = (x-1)^{3/2} = f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}$

$$s = \int_1^2 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{9}{4}x-\frac{5}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{9x-5}\,dx = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{1}{9}\frac{(9x-5)^{3/2}}{3/\cancel{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{27}\left(13^{3/2}-4^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{13^{3/2}-(4^{1/2})^3}{27} = \frac{13^{3/2}-8}{27} \text{ längdenheter.}$$

7.3.10 Finn längden s av kurvan $y = x^2 - \frac{\ln(x)}{8} = f(x)$ från $x=1$ till $x=2$

$f'(x) = 2x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x}$

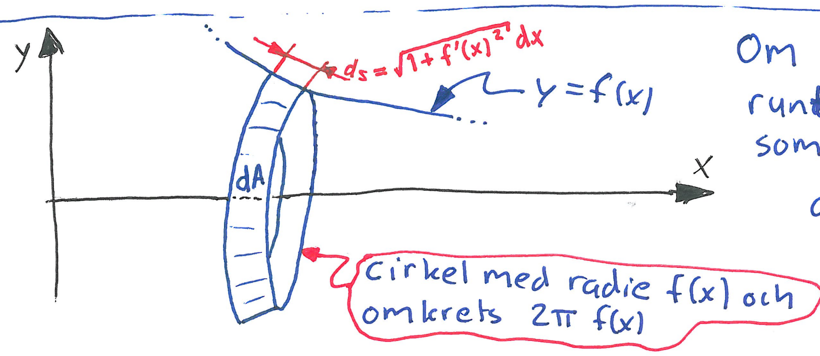
$$1+f'(x)^2 = 1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2 = 1+(2x)^2-\overbrace{2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}}^{=\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{8x}\right)^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}+\left(\frac{1}{8x}\right)^2$$

$$= \left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2$$

② Båglängden är

$$s = \int_1^2 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_1^2 \left(2x + \frac{1}{8x}\right) dx = \left[x^2 + \frac{1}{8}\ln(x)\right]_1^2 = 4 + \frac{1}{8}\ln(2) - 1 - 0 =$$

$$s = 3 + \frac{1}{8}\ln(2) \text{ längdenheter}$$



Om man roterar en kurva $y = f(x)$ runt x-axeln så ger detta en yta som kan beskrivas med areaelement

$$dA = 2\pi f(x) \cdot ds = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

För x sådana att $f(x)$ är negativ så är radien istället $|f(x)|$ ovan.

Detta ger

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Exempel

Rotera kurvan $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ runt x-axeln.

a) Räkna ut arean på rotationsytan som detta ger.

b) Räkna ut rotationsvolymen som detta ger

Lösning

a) Vi har $y = \frac{1}{x} = f(x)$.

$f'(x) = -x^{-2}$

Svår räkna ut, men vi kan ju kolla om den konvergerar.

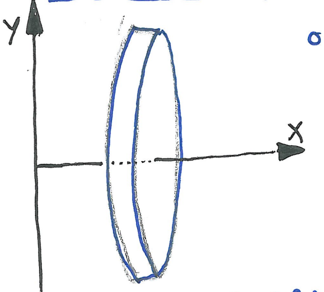
$$A = 2\pi \int_1^\infty \left|\frac{1}{x}\right| \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}_{\substack{\geq 1 \\ (\leq 2)}}\,dx \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = 2\pi \lim_{R\to\infty} \left[\ln(x)\right]_1^R$$

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty} \left(\underbrace{\ln(R)}_{\to\infty} - 0\right) = \infty$$

Svar: Oändlig area

b) Volymelement: skiva med tjocklek dx, radie $\frac{1}{x}$, tvärsnittsarea $A(x) = \pi \cdot \frac{1}{x^2}$

och volym $dV = A(x)\,dx = \pi \frac{1}{x^2}\,dx$



Totala volymen blir

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-2}\,dx = \pi \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^R =$$

SVAR: $V = \pi \lim_{R\to\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{R}}_{\to 0} + \frac{1}{1}\right) = \pi$ volymenheter.

Om vi fyller volymen med målarfärg så räcker det alltså med π volymenheter, trots att den inneslutande arean (= "färgburkens insida") har oändlig area, så det skulle behövas oändligt mycket målarfärg för att måla den.