L33 Kurva i parameterform, lutning Adams 8.2–8.3

Kurva i parameterform: $x = f(t)$, $y = g(t)$, parameter t i något intervall I.

Ex 2
$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) & (1) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) & (2) \end{cases}$$

Lös ut t från (1) och sätt in i (2):

$t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ sätt in i (2):

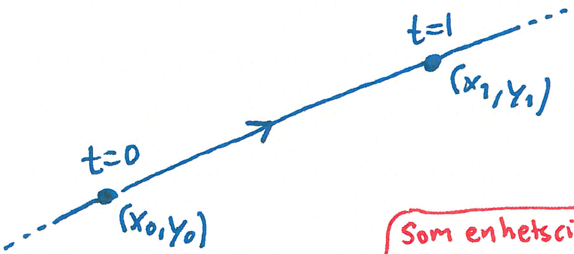
$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{konstant}} x + \underbrace{y_0 - x_0 \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{konstant}}$$

Rät linje!

$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + x_1 - x_0 = x_1 \\ y = y_0 + y_1 - y_0 = y_1 \end{cases}$

Kurvan är en rät linje genom (x_0, y_0) och (x_1, y_1)



Som enhetscirkeln, men skaländring med faktor 5 i x- och y-led.

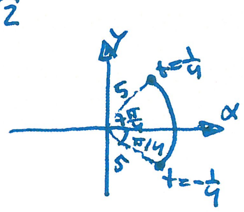
Ex $\begin{cases} x = 5\cos(\pi t) \\ y = 5\sin(\pi t) \end{cases}$, $-\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{4}$

Parameterform för del av en cirkel med radie 5, ty (centrum i (0,0) och)

$$x^2 + y^2 = 5^2\cos^2(\pi t) + 5^2\sin^2(\pi t) = 5^2\underbrace{(\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t))}_{=1} = 5^2$$

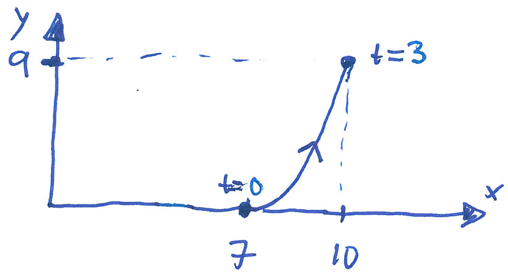
$t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\cos(-\frac{\pi}{4}) = 5\cos(\frac{\pi}{4}) = 5\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 5\sin(-\frac{\pi}{4}) = -5\sin(\frac{\pi}{4}) = -5\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$t = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\cos(\frac{\pi}{4}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 5\sin(\frac{\pi}{4}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



② Ex $\begin{cases} x = t+7 & (1) \\ y = t^2 & (2) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 3$

$(1) \Rightarrow t = x-7$ sätt in i (2): $y = (x-7)^2$



Derivering

Om $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ så är $y = g(t) \overset{\text{Förutsatt att } f \text{ inverterbar}}{=} g(f^{-1}(x))$ och

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} g(f^{-1}(x)) \overset{\text{Kedjeregeln}}{=} g'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \qquad (*)$$

För sista faktorn såg vi i läsperiod 1 att derivering av

$$x = f(f^{-1}(x)) \text{ ger}$$

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

Insättning i (*) ger att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Detta krävde att f är inverterbar och $f'(t)$ nollskilld, och så är fallet tex för t på ett intervall där $f'(t)$ är kontinuerlig och $f'(t) \neq 0$ (dvs f strängt växande alternativt strängt avtagande. Detta ger

Teorem 1 (Avsnitt 8.3)

För en kurva $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, om $f'(t) \neq 0$ och $f'(t)$ är kontinuerlig för t på ett intervall I, så gäller att $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

På samma sätt: Om $g'(t) \neq 0$ och $g'(t)$ kontinuerlig för t på I så är $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$

8.3.4

Givet: $\begin{cases} x = f(t) = t^3 - 3t \\ y = g(t) = 2t^3 + 3t^2 \end{cases}$

Sökt: Alla punkter (x,y) där kurvan har

a) en horisontell tangent (dvs $\frac{dy}{dx} = 0$)

b) en vertikal tangent (dvs $\frac{dx}{dy} = 0$)

Lösning: $f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2-1)$

$g'(t) = 6t^2 + 6t = 6t(t+1)$

a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{6t(t+1)}{3(t^2-1)} = \frac{6t\cancel{(t+1)}}{3(t-1)\cancel{(t+1)}}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ för $t=0$, dvs $x = f(0) = 0$, $y = g(0) = 0$

SVAR: Horisontell tangent för $(x,y) = (0,0)$

b) $$\frac{dx}{dy} = \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{3(t-1)}{6t}$$

$\frac{dx}{dy} = 0$ för $t=1$, dvs för $x = f(1) = -2$, $y = g(1) = 5$

SVAR: Vertikal tangent för $(x,y) = (-2,5)$

8.3.12

Givet: $\begin{cases} x = e^{2t} = f(t) \\ y = te^{2t} = g(t) \end{cases}$

Sökt: Kurvans lutning i punkten $t = -2$

Lösning: $f'(t) = 2e^{2t}$

$g'(t) = 1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} = (1+2t)e^{2t}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{(1+2t)\cancel{e^{2t}}}{2\cancel{e^{2t}}}$$

För $t=-2$ är kurvans lutning $\frac{dy}{dx} = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$

SVAR: $-\frac{3}{2}$

④ Sid 477 i boken:

Tangenten till kurvan $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ genom punkten

$(f(t_0), g(t_0))$ är linjen

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

8.3.14

Givet: $\begin{cases} x = t - \cos(t) = f(t) \\ y = 1 - \sin(t) = g(t) \end{cases}$

Sökt: Tangenten genom $(f(\frac{\pi}{4}), g(\frac{\pi}{4}))$ skriven på parameterform.

Lösning: $f'(t) = 1 + \sin(t)$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$g'(t) = -\cos(t)$, $g'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Tangentens ekvation:

$$\begin{cases} x = f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})(t - \frac{\pi}{4}) \\ y = g(\frac{\pi}{4}) + g'(\frac{\pi}{4})(t - \frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$