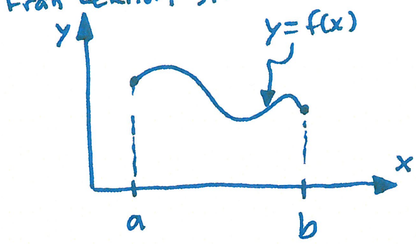
L34 Mer om båglängd + rotationsyta

(Adams 8.4) ①

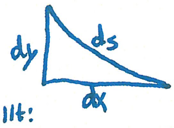
8.5–8.6 utgår 2014

Från Lektion 31:



Beräkna längden på kurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$.

Längdelement:



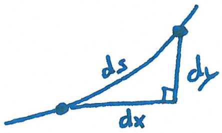
Formellt:

$$ds \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2} = \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$$

Liknande för kurva på parameterform $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$.

Längdelement:



$$ds \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) dt^2} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt}$$

8.4.2 Sökt: Längden s på kurvan $\begin{cases} x = 1 + t^3 = f(t) \\ y = 1 - t^2 = g(t) \end{cases}$, $-1 \le t \le 2$.

Lösning: $f'(t) = 3t^2$

$g'(t) = -2t$

$$s = \int_{-1}^{2} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{9t^2+4}\,|t|\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{9t^2+4}\,(-t)\, dt + \int_0^2 \sqrt{9t^2+4}\, t\, dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = 9t^2+4 \\ du = 18t\,dt \\ t=-1 \Rightarrow u = 13 \\ t = 0 \Rightarrow u = 4 \\ t = 2 \Rightarrow u = 40 \end{array}\right] = \frac{1}{18}\left(-\int_{13}^{4} u^{1/2}\, du + \int_4^{40} u^{1/2}\, du\right) =$$

$$= \frac{1}{18}\left(\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^{13} + \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^{40}\right) = \frac{1}{\cancel{18}_{9}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}\left(13^{3/2} - 4^{3/2} + 40^{3/2} - 4^{3/2}\right)$$

$4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$

SVAR: $s = \frac{1}{27}\left(13^{3/2} + 40^{3/2} - 16\right)$ längdenheter

---

8.4.6 Sökt: Längden s på kurvan $\begin{cases} x = \cos(t) + t\sin(t) = f(t) \\ y = \sin(t) - t\cos(t) = g(t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Lösning: $f'(t) = -\sin(t) + 1\cdot\sin(t) + t\cos(t) = t\cos(t)$

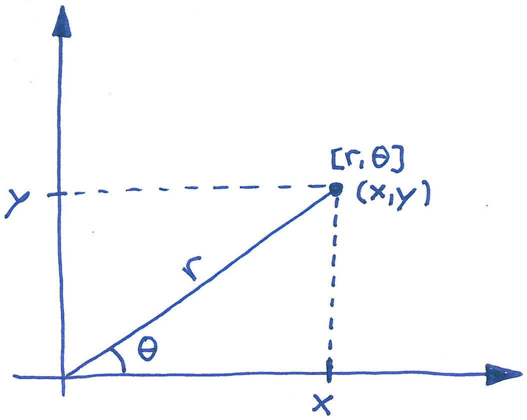
$g'(t) = \cos(t) - 1\cdot\cos(t) + t\sin(t) = t\sin(t)$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2\underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{=1}}\, dt = \int_0^{2\pi} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

SVAR: $s = \frac{4\pi^2}{2} - 0 = 2\pi^2$ längdenheter.

Tips: I någon av de utdelade uppgifterna kan man ha nytta av formeln $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ omskriven på formen $1 + \cos(t) = 2\,\frac{1+\cos(t)}{2} = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$

② POLÄRA KOORDINATER $[r,\theta]$



Istället för att ange en punkt i planet med dess koordinater (x,y) i ett rätvinkligt koordinatsystem så kan man beskriva dess position genom att ange dess avstånd r från origo och vinkel θ relativt x-axeln räknad positiv moturs som i figuren. Man kallar r och θ polära koordinater och Adams anger dessa med hakparanteser $[r,\theta]$.

Sam band:

$x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$	$x^2+y^2=r^2$ $\tan(\theta)=\frac{y}{x}$

Skriv om från polära till rätvinkliga koordinater:

8.5.2 $\quad r = -\dfrac{2}{\sin(\theta)}$

$$r\sin(\theta) = -2$$

$y=-2$ horisontell linje

8.5.4 $\quad r = \sin(\theta) + \cos(\theta)$

$$r^2 = r\sin(\theta) + r\cos(\theta)$$

$x^2+y^2 = y+x$ Kvadratkomplettera!

$$\underbrace{x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}}_{=(x-\frac{1}{2})^2}-\tfrac{1}{4}+\underbrace{y^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}}_{=(y-\frac{1}{2})^2}-\tfrac{1}{4}=0$$

$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ cirkel med radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och centrum i $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

8.5.12 $\quad r = \dfrac{2}{1+\sin(\theta)}$

$$r+\underbrace{r\sin(\theta)}_{y} = 2$$

$$r = 2-y$$

$$r^2 = (2-y)^2$$

$$x^2+\cancel{y^2} = 4-4y+\cancel{y^2}$$

$y = \frac{4-x^2}{4}$ parabel

För att rita funktionskurva till ekvation $r = f(\theta)$ kan det underlätta att först räkna ut för vilka vinklar θ som r har nollställen och lokala max/min.

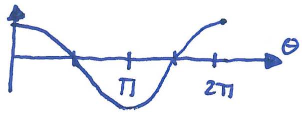
Exempel 4

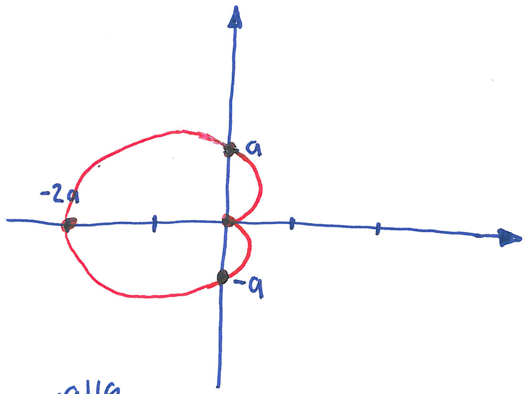
Skissa upp funktionskurvan (= polärt diagram = polar graph)

$$r = a(1-\cos(\theta)), \quad a>0.$$

2π-periodisk, så vi kan nöja oss med att undersöka då $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	0	a	$2a$ max	a	0





Ex Räkna ut alla skärningspunkter mellan kurvorna

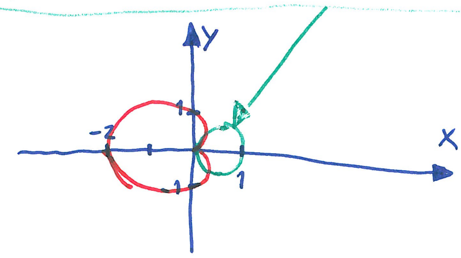
$$r = \cos(\theta) \quad \text{och} \quad \underbrace{r = 1-\cos(\theta)}_{\text{samma som ovan för specialfallet } a=1.} \qquad (*)$$

$$r^2 \overset{\Updownarrow}{=} r\cos(\theta)$$

$$x^2+y^2 = x$$

$$\underbrace{x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}}_{=(x-\frac{1}{2})^2} - \tfrac{1}{4} + y^2 = 0$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}$$ cirkel med radie $\frac{1}{2}$ och centrum i $(\frac{1}{2}, 0)$

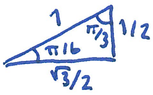


Båda går genom origo, så en skärningspunkt är origo. Ser ut att finnas två till. Dessa får vi genom att sätta högerleden lika i $(*)$:

4

$$\cos(\theta) = 1 - \cos(\theta), \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

$$2\cos(\theta) = 1$$

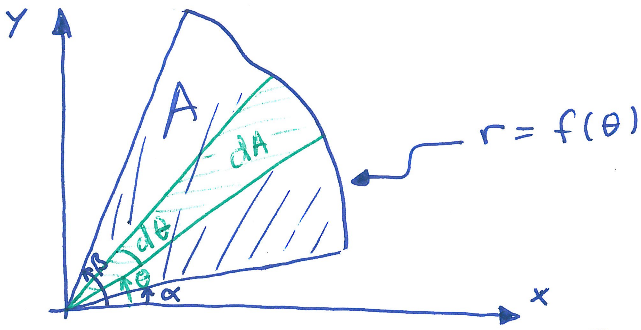


$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}, \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

$\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ För båda kurvorna är då $r = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Svar: Origo och punkterna med polära koordinater $[r, \theta] = \left[\frac{1}{2}, \pm\frac{\pi}{3}\right]$

Area i polära koordinater

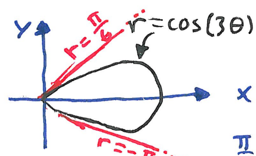


$$dA = \frac{d\theta}{2\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} r^2 = \frac{1}{2} f(\theta)^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 \, d\theta$$

Ex Beräkna arean av $r = \cos(3\theta)$, $-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$

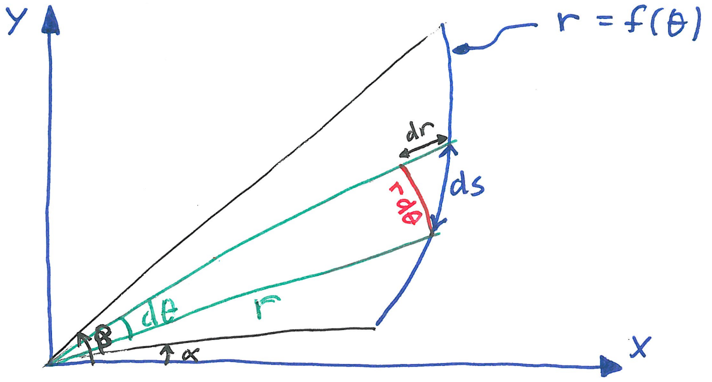
θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$
r	1 max	0



$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos(6\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{6}\sin(6\theta)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{12} \text{ areaenheter}$$

Båglängd för polär kurva



$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta$$

Båglängd: $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta$

8.6.12

Beräkna längden på kurvan $r = \theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$

$f(\theta) = \theta^2$

$f'(\theta) = 2\theta$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{4\theta^2 + \theta^4}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \theta\sqrt{4+\theta^2}\, 2\, d\theta = \left[\begin{array}{l} u = 4+\theta^2 \\ du = 2\theta\, d\theta \\ \theta = 0 \Leftrightarrow u = 4 \\ \theta = \pi \Leftrightarrow u = 4+\pi^2 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_4^{4+\pi^2} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^{4+\pi^2} = \frac{1}{3}\left((4+\pi^2)^{3/2} - \underbrace{4^{3/2}}_{=(4^{1/2})^3 = 8}\right)$$

SVAR: $s = \frac{1}{3}\left((4+\pi^2)^{3/2} - 8\right)$ längdenheter