TENTAMEN 2008-08-22

1. Låt L vara skärningslinjen mellan planen $x - y + 2z = 5$ och $x - 2y + 3z = 5$.

a) Ange en parameterframställning för L. (2p)

b) Beräkna avståndet från punkten $(1, 0, -2)$ till L. (3p)

TENTAMEN 2010-03 16

Problem 6: Lös **endast ett** av de följande två problemen:

1) Bevisa att för alla linjära ekvationssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

där A är en given $m \times n$ koefficientmatris och $\mathbf{b} \in R^m$, kan inte tillåta exakt två lösningar.

2) ~~Området R begränsas av $y = x^{-k}$ och $y = 0$ och liggande till höger om $x = 1$ roteras runt X-axeln. Hitta alla k för vilka rotationsvolymen får ändlig volym.~~

[5 poäng]

TENTAMEN 2011-12-21

5. Låt T vara den linjära avbildning som innebär att vektorer i $\mathbb{R}^2$ först roteras med vinkeln $2\pi/3$ moturs och sedan speglas i x_2-axeln. Bestäm avbildningens standardmatris. (5p)

TENTAMEN 2012-08-24

Uppgift 2:

a) Ange en parameterframställning av linjen

$$x + y + z = 2$$
$$3x - y = 1.$$

b) Ovanstående linje skär planet $x - 2y + z = 0$ i en punkt. Bestäm denna.

c) Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 3, 2)$ till planet $2x - y + 3z = 3$.

[5 poäng]

TENTAMEN 2013-01-15

Uppgift 1:

a) Bestäm inversen av följande matris, om en sådan existerar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Betrakta följande system av ekvationer:

$$x + y = 2$$
$$y + z = 2$$
$$x + z = 2$$
$$ax + by + cz = 0,$$

där a, b och c är obestämda reella parametrar. Bestäm villkor på parametrarna a, b och c så att det givna systemet har

i) en **unik lösning** för x, y och z. Ange även lösningen under detta villkor om denna lösning existerar;

ii) **inga lösningar** för x, y och z (detta betyder att det givna systemet är inkonsistent);

iii) **oändligt många lösningar** för x, y och z. Ange även dessa lösningar om de existerar. [5 poäng]

Uppgift 2: Betrakta de två planen Π_1 och Π_2 i $\mathcal{R}^3$:

$$\Pi_1 : \quad x - y + 3z = 0$$
$$\Pi_2 : \quad 2x + y + 3z = 0.$$

a) Bestäm skärningslinjen på parameterform av de två planen Π_1 och Π_2.

b) Låt $T : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ vara den linjära avbildning som projicerar varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathcal{R}^3$ **ortogonalt** på denna skärningslinje av de givna planen Π_1 och Π_2. Bestäm sedan **standardmatrisen** för denna avbildning T.

[5 points]

TENTAMEN 2014-01-14

Problem 1: Betrakta följande två linjer på parameterform i $\mathbb{R}^3$

$$\ell_1: \begin{cases} x = -3t + 4 \\ y = 6t - 4 \\ z = -6t + 9 \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \ell_2: \begin{cases} x = -2s - 3 \\ y = 4s + 10 \\ z = -6s - 9 \quad \text{för alla } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna ℓ_1 och ℓ_2. [2 poäng]

b) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller båda linjerna ℓ_1 och ℓ_2. [2 poäng]

c) Betrakta nu en till linje på parameterform i $\mathbb{R}^3$, nämligen

$$\ell_3: \begin{cases} x = 2r + a \\ y = -2r + 5 \\ z = 3 \quad \text{för alla } r \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Bestäm värdet på a, så att ℓ_3 skär ℓ_1 och ℓ_2 i samma punkt. Beräkna också vinkeln mellan ℓ_1 och ℓ_3. [2 poäng]

Problem 2: Betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm **alla** värden på $\lambda \in \mathbb{R}$, så att $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ spänner upp $\mathbb{R}^3$, dvs $\mathbb{R}^3 = \text{span}\,\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$. [2 poäng]

b) Bestäm värdet på $\lambda \in \mathbb{R}$, så att $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$. [1 poäng]

c) Bestäm **alla** värden på $k \in \mathbb{R}$, så att vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$$

tillhör planet som spänns upp av $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ (för värden på λ som du fick i uppgift 2 b)) . [2 poäng]

Problem 3:

a) Bestäm standardmatrisen för $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där T speglar varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

TENTAMEN 2014-06-05

Problem 5: Betrakta avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, så att varje vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbb{R}^3$ avbildas i $\mathbb{R}^2$ på följandet sätt:

$$T: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3).$$

a) Ange definitionen av en linjär avbildning $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och visa att den ovan givna avbildningen T är linjär. [2 poäng]

b) Bestäm standardmatrisen till T. [1 poäng]

c) Avgör om T är **på** (surjektiv) eller **1-1** (injektiv) och ange värdemängden av T. [3 poäng]

Problem 6: Lös ett och endast ett av följande problem a) eller b) eller c).

c) Betrakta matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

där A är en inverterbar $n \times n$ matris, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Formulera och bevisa Cramers regel för ekvationen.

TENTAMEN 2014-08-22

Problem 2:

Låt

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & a+6 \end{pmatrix}.$$

a) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ är kolonnerna i A tre linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^3$? [2 poäng]

b) För vilka värde på $a \in \mathbb{R}$ är A inverterbar? [1 poäng]

c) Invertera A då $a = 0$ (om möjligt). [2 poäng]

Problem 3:

a) Bestäm standardmatrisen för $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, där T projicerar varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ortogonalt på följande linjen

$$\ell: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$