TENTAMEN 2008-08-22

1. Låt L vara skärningslinjen mellan planen $x-y+2z=5$ och $x-2y+3z=5$.

a) Ange en parameterframställning för L. (2p)

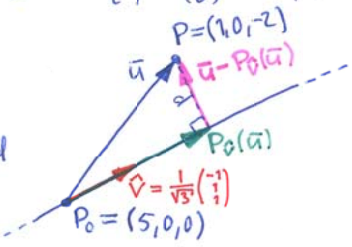
b) Beräkna avståndet från punkten $(1,0,-2)$ till L. (3p)

a) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ x-2y+3z=5 \end{cases}$ Skriv på matris form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{(2)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\cdot(-1) \overset{(1)-(2)}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\begin{cases} \text{Fri parameter: } z=t \\ y=t \\ x=5-t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

SVAR: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



b) Kan räknas ut t ex med kryssprodukt som i boken (eller med vektor projektion som följer.

I figuren har vi $\bar{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vektorprojektionen av $\bar{u}$ på $\hat{v}$ är

$$P_{\hat{v}}(\bar{u}) = (\bar{u}\cdot\hat{v})\cdot\hat{v}$$

och det sökta avståndet är längden på vektorn

$$\bar{u} - P_{\hat{v}}(\bar{u}) = \bar{u} - (\bar{u}\cdot\hat{v})\hat{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(4+0-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -12+2 \\ 0-2 \\ -6-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d = |\bar{u} - P_{\hat{v}}(\bar{u})| = \frac{2}{3}\sqrt{25+1+16} = \frac{2}{3}\sqrt{42} = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot 3\cdot 14} = \sqrt{\frac{4\cdot 14}{3}} = \sqrt{\frac{56}{3}}$$

Enklare som i boken: $d = |\bar{u}|\sin(\theta) = \dfrac{|\bar{u}|\cdot|\hat{v}|\sin(\theta)}{|\hat{v}|} = \dfrac{|\bar{u}\times\hat{v}|}{\underbrace{|\hat{v}|}_{=1}}$

SVAR $d = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+9+4} = \sqrt{\frac{56}{3}}$

TENTAMEN 2010-03-16

Problem 6: Lös **endast ett** av de följande två problemen:

1) Bevisa att för alla linjära ekvationssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

där A är en given $m\times n$ koefficientmatris och $\mathbf{b}\in \mathbf{R}^m$, kan inte tillåta exakt två lösningar.

2) Området R begränsas av $y=x^{-k}$ och $y=0$ och liggande till höger om $x=1$ roteras runt X-axeln. Hitta alla k för vilka rotations volymen får ändlig volym.

[5 poäng]

Lösning:

Antag att $A\bar{u}=\bar{b}$ och $A\bar{v}=\bar{b}$ med $\bar{u}\neq\bar{v}$,

så att vi kan bilda $\bar{w}=\bar{u}-\bar{v}\neq\bar{0}$

$$A\bar{w} = A(\bar{u}-\bar{v}) = A\bar{u}-A\bar{v} = \bar{b}-\bar{b} = \bar{0}$$

Då finns oändligt många olika vektorer

$$\bar{y} = \bar{u}+t\bar{w}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Sådana att $A\bar{y} = A(\bar{u}+t\bar{w}) = A\bar{u}+tA\bar{w} = \bar{b}+t\bar{0} = \bar{b}$.

Alltså kan det inte finnas exakt två olika lösningar. v.s.v

TENTAMEN 2011-08-19

Uppgift 2:

a) Bestäm en ekvation för det plan P som är ortogonalt mot de bägge planen

P_1: $x-5y=14$ och $y+z-3=0$ (P_2) samt innehåller punkten (2,1,3).

b) Undersök om punkterna $(1,1,1)$, $(0,2,1)$, $(-1,0,1)$ och $(2,2,-3)$ ligger i samma plan.

[6 poäng]

a) P_1 och P_2 har normalvektorer $\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kryssprodukten

$$\bar{n} = \bar{n}_1\times\bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

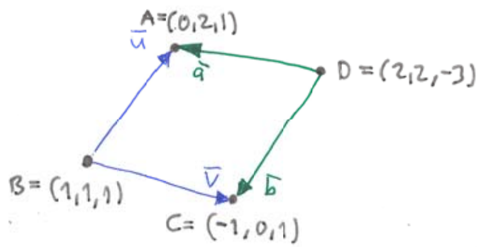
$\bar{n}$ är alltså riktningsvektor för skärningslinjen mellan planen.

är parallell både med P_1 (eftersom $\bar{n}\perp\bar{n}_1$) och P_2 (ty $\bar{n}\perp\bar{n}_2$).

Alltså är $\bar{n}$ normalvektor till det sökta planet, så vi får:

SVAR: $-5(x-2) - 1\cdot(y-1) + 1\cdot(z-3) = 0$

b)



Normalvektor för planet genom A, B, C:

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

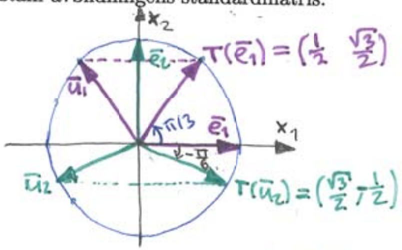
Normalvektor för planet genom A, C, D:

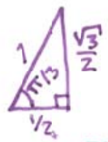
$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}$$

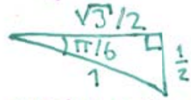
SVAR: Ej parallella, så D ligger ej i samma plan som A, B, C.

TENTAMEN 2011-12-21

5. Låt T vara den linjära avbildning som innebär att vektorer i $\mathbf{R}^2$ först roteras med vinkeln $2\pi/3$ moturs och sedan speglas i x_2-axeln. Bestäm avbildningens standardmatris. (5p)







$\bar{e}_1$ roteras först till $\bar{u}_1$ och speglas sedan till $T(\bar{e}_1)$.
$\bar{e}_2$ roteras först till $\bar{u}_2$ och speglas sedan till $T(\bar{u}_2)$.

Som i figuren fås då $T(\bar{e}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ och $T(\bar{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$.

SVAR: Standardmatris $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$

TENTAMEN 2012-06-02

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 2 & 5\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & a+5\end{bmatrix}$$

a) Beräkna det A. (2p)
b) För vilka värden på a är A inverterbar? (1p)
c) Invertera A för $a = 0$ (om möjligt). (2p)

a) Utveckling längs rad 2:

$$\det(A) = -1\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & a+5\end{vmatrix} + 0 - (-1)\begin{vmatrix}a-2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(2(a+5)-15) + 3(a-2) - 4 =$$
$$= -2a + 5 + 3a - 10 = a - 5$$

SVAR: $a-5$

b) Inverterbar då $\det(A) \neq 0$.
SVAR: $a \neq 5$

c)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l}\\ 2\cdot(2)+(1)\\ (3)+(1)\end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l}\\ \\ 2\cdot(3)-5\cdot(2)\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -3 & -10 & 2\end{array}\right) \begin{array}{l}(1)-(3)\\ 5\cdot(2)-3\cdot(3)\\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 0 & 4 & 10 & -2\\ 0 & 10 & 0 & 14 & 40 & -6\\ 0 & 0 & 5 & -3 & -10 & 2\end{array}\right) \begin{array}{l}5\cdot(1)-(2)\\ \cdot\frac{1}{2}\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -10 & 0 & 0 & 6 & 10 & -4\\ 0 & 5 & 0 & 7 & 20 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3 & -10 & 2\end{array}\right) \begin{array}{l}\cdot\frac{-1}{10}\\ \cdot\frac{1}{5}\\ \cdot\frac{1}{5}\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -1 & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & 4 & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -2 & \frac{2}{5}\end{array}\right)$$

SVAR: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -5 & 2\\ 7 & 20 & -3\\ -3 & 10 & 2\end{pmatrix}$

TENTAMEN 2012-08-24

Uppgift 1: Betrakta följande vektorerna i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm det eller de värden på h så att vektor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$$

tillhör mängden Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

b) Bestäm ekvationen för planet i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ om ett sådant finns.

[5 poäng]

(a) Gäller att välja h så att det finns minst en lösning till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{array}\right) \underset{(2)+2\cdot(1)}{\overset{(2)+(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{array}\right) \underset{(3)-3\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{array}\right)$$

Lösbart bara om $h-5=0$.

Svar: $h=5$

5

(b) $$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ -10+7 \\ -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 6-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\, \overline{v}_1 \times \overline{v}_2$$

Alltså spänner alla tre vektorerna upp samma plan. Planet går genom origo och har normalvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, så planets ekvation är

$$-1x - 3y + 1z = 0$$

SVAR: $-x-3y+z=0$

3

Uppgift 2:

a) Ange en parameterframställning av linjen

$$x+y+z=2$$
$$3x-y=1.$$

b) Ovanstående linje skär planet $x-2y+z=0$ i en punkt. Bestäm denna.

c) Bestäm avståndet från punkten $P=(1,3,2)$ till planet $2x-y+3z=3$.

[5 poäng]

a) Lösning av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)-3\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{4}\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right) \overset{(1)-(2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right) \end{array}$$

Fri parameter: $z=t$

$y = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}t$

$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t$ $\quad (*)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t \\ \frac{5}{4} - \frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Enklare än att lösa ekvationssystem: Sätt in (*) i planets ekvation.

$$4\cdot\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}t - 2\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}t\right) + t\right) = 0\cdot 4$$

$$3 - t - 10 + 6t + 4t = 0$$

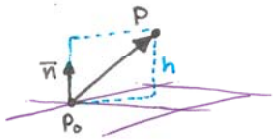
$$-7 + 9t = 0$$

$$t = \frac{7}{9}$$ ger punkten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{9\cdot 1}{9\cdot 4}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{36}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 27 & -7 \\ 45 & -21 \\ 0 & +28 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c) Punkt på planet: $P_0 = (0,0,1)$

normalvektor: $\overline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



SVAR: $\overline{h} = \left| \frac{\overline{P_0P} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{|\overline{n}|} \right| = \left| \frac{2-3+3}{\sqrt{4+1+9}} \right| = \frac{2}{\sqrt{14}}$

3

Uppgift 3: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}.$$

a) För vilka värden på a har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, en entydig lösning?

b) Beräkna A^{-1} för ovanstående matris då $a = 1$.

[5 poäng]

a) $\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ -2 & -a \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} = -a^2 + 4 + 4 - a^2 = 8 - 2a^2$

singulär matris då $8 - 2a^2 = 0$

$$8 = 2a^2$$

$$a = \pm 2$$

Svar: Entydig lösning då $a \neq \pm 2$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)+4\cdot(2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 6\cdot(1)-(3) \\ 3\cdot(2)-(3) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 12 & 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)-4\cdot(2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{6} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot\frac{1}{6} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

SVAR: $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

TENTAMEN 2013-01-15

Uppgift 1:

a) Bestäm inversen av följande matris, om en sådan existerar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Betrakta följande system av ekvationer:

$$x + y = 2$$
$$y + z = 2$$
$$x + z = 2$$
$$ax + by + cz = 0,$$

där a, b och c är obestämda reella parametrar. Bestäm villkor på parametrarna a, b och c så att det givna systemet har

i) en **unik lösning** för x, y och z. Ange även lösningen under detta villkor om denna lösning existerar;

ii) **inga lösningar** för x, y och z (detta betyder att det givna systemet är inkonsistent);

iii) **oändligt många lösningar** för x, y och z. Ange även dessa lösningar om de existerar.

[5 poäng]

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)+(2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{2\cdot(2)-(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)-\frac{1}{2}\cdot(2) \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

SVAR: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Kan förstås lösas genom att ställa upp ekvationssystem, skriva på matrisform och Gausseliminera, men här är delar av jobbet redan gjort. Första tre ekvationerna kan skrivas $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, vilket har lösning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Alltså finns lösningen (*) eller ingen lösning alls beroende på om fjärde ekvationen uppfylls:

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0$$

SVAR: (i) Om $a+b+c=0$ så finns unik lösning $x=y=z=1$

(ii) Om $a+b+c\neq 0$ så finns inga lösningar.

(iii) Oändligt många lösningar finns ej för något val av a,b,c.

(Alternativt fås samma slutsats via Gausseliminering:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & c & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x & y & z) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{array}\right) \end{array}$$

)

Uppgift 2: Betrakta de två planen Π_1 och Π_2 i $\mathcal{R}^3$:

$$\Pi_1: \quad x-y+3z=0$$
$$\Pi_2: \quad 2x+y+3z=0.$$

a) Bestäm skärningslinjen på parameterform av de två planen Π_1 och Π_2.

b) Låt $T: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ vara den linjära avbildning som projicerar varje vektor **x** i $\mathcal{R}^3$ **ortogonalt** på denna skärningslinje av de givna planen Π_1 och Π_2. Bestäm sedan **standardmatrisen** för denna avbildning T.

[5 points]

a)
$$\begin{array}{c} (x \quad y \quad z) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{(2)-2\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)+\frac{1}{3}(2) \\ \cdot\frac{1}{3} \end{array} \sim \begin{array}{c} (x \quad y \quad z) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Fri parameter: $z=t$

$y=t$

$x=-2t$

SVAR: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}}$

b) Kalla linjen L och dess riktningsvektor $\bar{v}$ med enhetsvektor $\hat{v} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Då har vi avbildningen

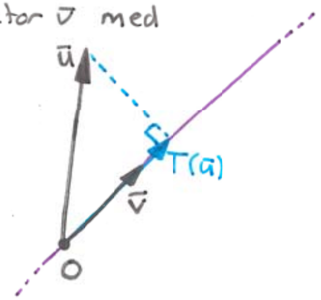
$T: \quad \bar{u} \mapsto T(\bar{u}) = (\bar{u}\cdot\hat{v})\hat{v}$

För $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ så får vi

$T(\bar{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(-2)\,\hat{v}$

$T(\bar{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 1\,\hat{v}$

$T(\bar{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 1\,\hat{v}$



SVAR: Standardmatris $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

TENTAMEN 2014-01-14

Problem 1: Betrakta följande två linjer på parameterform i $\mathbb{R}^3$

$$\ell_1 : \begin{cases} x = -3t + 4 \\ y = 6t - 4 \\ z = -6t + 9 \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = -2s - 3 \\ y = 4s + 10 \\ z = -6s - 9 \quad \text{för alla } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna ℓ_1 och ℓ_2. [2 poäng]

b) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller båda linjerna ℓ_1 och ℓ_2. [2 poäng]

c) Betrakta nu en till linje på parameterform i $\mathbb{R}^3$, nämligen

$$\ell_3 : \begin{cases} x = 2r + a \\ y = -2r + 5 \\ z = 3 \quad \text{för alla } r \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Bestäm värdet på a, så att ℓ_3 skär ℓ_1 och ℓ_2 i samma punkt. Beräkna också vinkeln mellan ℓ_1 och ℓ_3. [2 poäng]

a) För en punkt som ligger på båda linjerna så gäller att

$$\begin{cases} -3t + 4 = -2s - 3 \\ 6t - 4 = 4s + 10 \\ -6t + 9 = -6s - 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 2s - 3t = -7 \\ -4s + 6t = 14 \\ 6s - 6t = -18 \end{cases}$$ Skrives på matrisform

$$\begin{array}{cc} (s & t) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -7 \\ -4 & 6 & 14 \\ 6 & -6 & -18 \end{array}\right) \underset{(3)-3\cdot(1)}{\overset{(2)+2\cdot(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)+(3)}{\underset{\cdot\frac{1}{3}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim}$$

$$\sim \begin{array}{c} (s \quad t) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \iff \begin{cases} s = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$ Detta ger...

SVAR: Skärningspunkt $P = (1, 2, 3)$

b) Sökt: Plan genom P med normalvektor

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 + 24 \\ 12 - 18 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{array}$$

För enklare siffror kan vi istället välja normalvektor

$-\frac{1}{6}\bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vilket ger planet $2\cdot(x-1) + 1\cdot(y-2) + 0\cdot(z-3) = 0$

SVAR: $2(x-1) + y - 2 = 0$

c) Skall bestämma a så att $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ för något r, d vs så att

$$\begin{cases} 1 = 2r + a \\ 2 = -2r + 5 \\ 3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2r = 1 - a \\ 2r = 3 \end{cases}$$

Lösning finns om $1 - a = 3$, dvs om $\underline{\underline{a = -2}}$.

Vi har då linjen

$$\ell_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_3 = \text{riktningsvektor}} \qquad \left(r = \tfrac{3}{2} \text{ ger } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

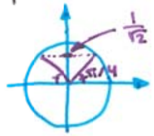
Riktningsvektor för ℓ_1 är $\bar{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Multiplikation med skalär ändrar ej riktningen

Om vinkeln mellan $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_3$ är θ så gäller att

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = |\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_3| \cos(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\cos(\theta) = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3}{|\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_3|} = \frac{-2 - 4 + 0}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$



SVAR: $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Problem 2: Betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}3\\\lambda\\7\end{pmatrix}.$$

a) Bestäm **alla** värden på $\lambda \in \mathbb{R}$, så att $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ spänner upp $\mathbb{R}^3$, dvs $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$. [2 poäng]

b) Bestäm värdet på $\lambda \in \mathbb{R}$, så att $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$. [1 poäng]

c) Bestäm **alla** värden på $k \in \mathbb{R}$, så att vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}8\\6\\k\end{pmatrix}$$

tillhör planet som spänns upp av $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ (för värden på λ som du fick i uppgift 2 b)) . [2 poäng]

a) Sökt: Alla λ sådana att vi ej får någon nollrad vid Gausseliminering av

$$\begin{pmatrix}3&-1&3\\6&0&\lambda\\2&1&7\end{pmatrix} \underset{3\cdot(3)-2\cdot(1)}{\overset{(2)-2\cdot(1)}{\sim}} \begin{pmatrix}3&-1&3\\0&2&\lambda-6\\0&5&15\end{pmatrix} \underset{\frac{2}{5}(3)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix}3&-1&3\\0&2&\lambda-6\\0&0&12-\lambda\end{pmatrix}$$

SVAR: $\lambda \neq 12$

b) Gäller att välja λ så att $\bar{u}_3$ ligger i planet som spänns upp av $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$, dvs så att $\bar{u}_3$ kan skrivas som en linjärkombination $\bar{u}_3 = c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2$. Som ovan fås

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&-1&3\\6&0&\lambda\\2&1&7\end{array}\right) \sim \cdots \sim \begin{array}{c} (c_1)\quad (c_2)\qquad\quad \\ \left(\begin{array}{cc|c}3&-1&3\\0&2&\lambda-6\\0&0&12-\lambda\end{array}\right)\end{array}.$$

Lösbart endast om $\lambda = 12$.

SVAR: $\lambda = 12$

c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&3&8\\6&0&12&6\\2&1&7&k\end{array}\right) \underset{3\cdot(3)-2\cdot(1)}{\overset{\frac{1}{2}\cdot(2)-(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&3&8\\0&1&3&-5\\0&5&15&3k-16\end{array}\right) \underset{(3)-5\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&3&8\\0&1&3&-5\\0&0&0&\underbrace{3k+9}_{\text{Lösbart om } 3k+9=0}\end{array}\right)$$

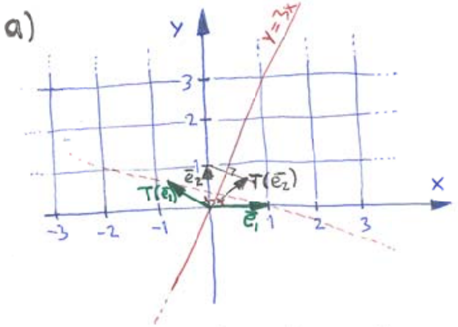
SVAR: $k=-3$

Problem 3:

a) Bestäm standardmatrisen för $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där T speglar varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ i linjen $y = 3x$. [3 poäng]

b) Visa att avbildningen T är en $1-1$ avbildning och bestäm standardmatrisen för den inversa avbildningen T^{-1}. [2 poäng]

a)



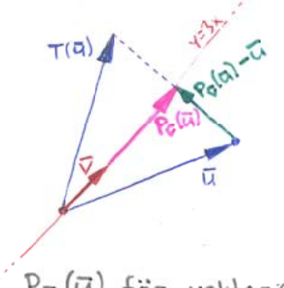
$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Lite knepigt att räkna ut $T(\bar{e}_1)$ och $T(\bar{e}_2)$ ur en tydlig figur, även om det går med lite (?) tålamod (räkna ut vinklar, utnyttja att av symmetriskäl måste $|T(\bar{e}_1)| = |T(\bar{e}_2)| = 1$ o sv). Här verkar dock enklare att använda projektion.

Linjen $y=3x$ har riktningsvektor $\bar{v} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, och en riktningsvektor med längd 1 är

$$\boxed{\hat{v} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}$$



Med beteckning $P_{\bar{v}}(\bar{u})$ för vektorprojektion av en vektor $\bar{u}$ på $\bar{v}$, så är

$$P_{\bar{v}}(\bar{u}) = (\bar{u}\cdot\hat{v})\,\hat{v}$$

Ur figuren ovan framgår att

$$T(\bar{u}) = \bar{u} + 2\left(P_{\bar{v}}(\bar{u}) - \bar{u}\right) = 2P_{\bar{v}}(\bar{u}) - \bar{u} = 2(\bar{u}\cdot\hat{v})\hat{v} - \bar{u}$$

$$T(\bar{e}_1) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}2-10\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = 2\,\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6\\18-10\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$

SVAR: Standardmatris $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8&6\\6&8\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&3\\3&4\end{pmatrix}$

b) $\det(A) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{25}{25} = -1 \neq 0.$

SVAR: Alltså är A inverterbar och avbildningen $\bar{x} \mapsto T(\bar{x}) = A\bar{x}$ är en 1-1-avbildning med invers avbildning T^{-1} som har standardmatris

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

TENTAMEN 2014-03-18

Problem 1:

a) Betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

och betrakta

$$W = \text{span}\,\{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2}\}.$$

i) Bestäm alla reella tal α så att

$$\mathbf{v} \subset W.$$

[2 poäng]

ii) Bestäm ekvationen för det plan som spänns upp av $\mathbf{u_1}$ och $\mathbf{u_2}$.

[2 poäng]

b) Betrakta följande två vektorer i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla reella tal a så att mängden $S = \{\mathbf{w_1},\ \mathbf{w_2}\}$ är linjärt oberoende.

[1 poäng]

a) i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \underset{(3)-(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha-2 \end{pmatrix} \underset{(3)-2\cdot(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-8 \end{pmatrix}$

SVAR: Lösbart om $\alpha \neq 8$.

ii) Sökt: Planet genom origo med normalvektor

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SVAR: $-x - 2y + z = 0$

b) Linjärt oberoende om endast triviala lösningen finns till $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a+2 \end{pmatrix}\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs om vi får två pivåelement vid Gausseliminering eller alternativt, om

$0 \neq \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a+2 \end{pmatrix}\right) = 1\cdot(a+2) - a^2 = -(a^2 - a - 2)$

Otillåtna värden: $a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2}$

SVAR: Linjärt oberoende om $a \neq -1$ och $a \neq -2$.

Problem 2:

a) Betrakta avbildningen $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ så att

$$T_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

och bestäm standardmatrisen för den inversa avbildningen T_1^{-1}, om en sådan existerar. [4 poäng]

a) Gäller att lösa $A\bar{u} = T_1(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} (u_1 & u_2 & u_3) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 7 \end{array}\right) \underset{(3)+3\cdot(1)}{\overset{(2)-2\cdot(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}(3)+\frac{1}{2}(2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)-2(3) \\ (2)+(3) \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{(1)+(2)}{\sim} \begin{array}{c} (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

SVAR: $\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Betrakta den linjära avbildningen $T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, där

$$T_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 + 5x_4 \\ -x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_3 - 7x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm standardmatrisen för T_2. [1 poäng]

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

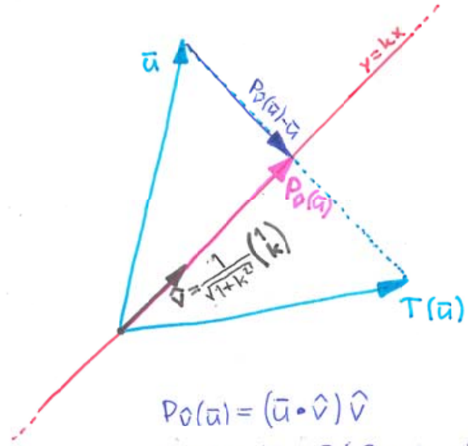
SVAR: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Problem 6:

a) Bestäm standardmatrisen för $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där T speglar varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ genom linjen $y = kx$, där k är ett godtyckligt reellt tal. [4 poäng]

b) Bestäm standardmatrisen för den inversa avbildningen till T i a). [1 poäng]

a)



$$P_{\hat{v}}(\bar{u}) = (\bar{u} \cdot \hat{v})\hat{v}$$
$$T(\bar{u}) = \bar{u} + 2(P_{\hat{v}}(\bar{u}) - \bar{u}) = 2P_{\hat{v}}(\bar{u}) - \bar{u}$$
$$T(\bar{u}) = 2(\bar{u} \cdot \hat{v})\hat{v} - \bar{u}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} - \frac{1+k^2}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 \\ 2k \end{pmatrix}$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2k}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} - \frac{1+k^2}{1+k^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 2k \\ k^2-1 \end{pmatrix}$$

SVAR: Avbildningsmatris $A = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$

b) $$\det(A) = \frac{1}{(1+k^2)^2}\left((1-k^2)(k^2-1) - 4k^2\right) = -\frac{(k^2-1)^2 + 4k^2}{(1+k^2)^2} =$$
$$= -\frac{(k^4 - 2k^2 + 1) + 4k^2}{(1+k^2)^2} = -\frac{k^4 + 2k^2 + 1}{(1+k^2)^2} = -\frac{(k^2+1)^2}{(1+k^2)^2} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} k^2-1 & -2k \\ -2k & 1-k^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$$

TENTAMEN 2014-06-05

Problem 4: Betrakta följande inhomogena ekvationsystem i variablerna x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$
\begin{aligned}
x_3 + 2x_5 &= 1 \\
x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_5 &= -2 \\
x_4 + 5x_5 &= 2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

a) Bestäm alla lösningar till systemet (1). Hur många lösningar har systemet (1)?

[3 poäng]

b) Betrakta nu det motsvarande homogena systemet till (1) och bestäm en linjärt oberoende mängd S av vektorer så att span$\{S\}$ motsvarar alla lösningar till det homogena systemet. Visa uttryckligen att din mängd S är linjärt oberoende.

[2 poäng]

a)

○ = pivåelement

$$
\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)
\sim
\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)}_{\text{trappstegsform}}
\overset{(1)-2\cdot(2)}{\sim}
\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)}_{\text{förenklad trappstegsform}}
$$

SVAR:

Fria variabler: $x_2 = s$, $x_5 = t$

$x_1 = -4 - 6x_2 = -4 - 6s$

$x_3 = 1 - 2x_5 = 1 - 2t$

$x_4 = 2 - 5x_5 = 2 - 5t$

Oändligt många lösningar (en för varje värde på $s, t \in \mathbb{R}$).

b) För motsvarande homogena system får vi samma Gauss-eliminering fastmed högerled $\bar{0}$, vilket ger

$$
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)
$$

Fria parametrar: $x_2 = s$, $x_5 = t$

$x_1 = -6s$

$x_3 = -2t$

$x_4 = -5t$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6s \\ s \\ -2t \\ -5t \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{s\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{= \bar{0} \text{ bara för } s=t=0 \\ \text{alltså linjärt oberoende!}}}
$$

SVAR: $\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Problem 5: Betrakta avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, så att varje vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbb{R}^3$ avbildas i $\mathbb{R}^2$ på följandet sätt:

$$T : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - 5x_2 + 4x_3,\ x_2 - 6x_3).$$

a) Ange definitionen av en linjär avbildning $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och visa att den ovan givna avbildningen T är linjär. [2 poäng]

b) Bestäm standardmatrisen till T. [1 poäng]

c) Avgör om T är **på** (surjektiv) eller **1-1** (injektiv) och ange värdemängden av T. [3 poäng]

(a) En avbildning $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas linjär om för alla $a, b \in \mathbb{R}$ och för varje $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ gäller att

$$S(a\bar{u} + b\bar{v}) = a\,S(\bar{u}) + b\,S(\bar{v})$$

Eftersom $a\bar{u} + b\bar{v} = \begin{pmatrix} au_1 + bv_1 \\ au_2 + bv_2 \\ au_3 + bv_3 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
T(a\bar{u} + b\bar{v}) &= \begin{pmatrix} au_1 + bv_1 - 5(au_2 + bv_2) + 4(au_3 + bv_3) \\ au_2 + bv_2 - 6(au_3 + bv_3) \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} u_1 - 5u_2 + 4u_3 \\ u_2 - 6u_3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} v_1 - 5v_2 + 4v_3 \\ v_2 - 6v_3 \end{pmatrix} \\
&= a\,T(\bar{u}) + b\,T(\bar{v})
\end{aligned}
$$

Alltså är T linjär

(b) $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Standardmatris: $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

(c) Vi löser först $A\bar{x} = \bar{b}$

$$
\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & -6 & b_2 \end{array}\right)}_{\text{trappstegsform}}
\overset{(1)+5\cdot(2)}{\sim}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}
\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -26 & b_1 + 5b_2 \\ 0 & 1 & -6 & b_2 \end{array}\right)}_{\substack{\text{Förenklad trappstegsform} \\ \text{(behövs egentligen ej i denna uppgift)}}}
$$

SVAR:

- Surjektiv/på eftersom lösning finns för varje $\bar{b}$
- Ej 1-1/injektiv eftersom vi får en fri parameter x_3 och därför ej unik lösning (utan oändligt många).

Problem 6: Lös ett och endast ett av följande problem a) eller b) eller c).

c) Betrakta matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

där A är en inverterbar $n \times n$ matris, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Formulera och bevisa Cramers regel för ekvationen.

Bevis som på lektion 15:

Teorem 7 Cramers regel (Avsnitt 3.3)

För varje inverterbar $n \times n$-matris A och varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$ så ges den unika lösningen $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ till $A\bar{x} = \bar{b}$ av

$$x_k = \frac{\det(A_k(\bar{b}))}{\det(A)}$$

Bevis

För $A = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \cdots \ \bar{a}_n)$ och $I_n = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \cdots \ \bar{e}_n)$

så är

$$A\, I_k(\bar{x}) = A(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_{k-1} \ \bar{x} \ \bar{e}_{k+1} \cdots \bar{e}_n)$$

$$= (A\bar{e}_1 \cdots A\bar{e}_{k-1} \ A\bar{x} \ A\bar{e}_{k+1} \cdots A\bar{e}_n)$$

$$= (\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{k-1} \ \bar{b} \ \bar{a}_{k+1} \cdots \bar{a}_n) = A_i(\bar{b})$$

$$\det(A)\det(I_k(\bar{x})) = \det(A_k(\bar{b}))$$

$$\frac{\det(A_k(\bar{b}))}{\det(A)} = \det(I_k(\bar{x})) = \begin{vmatrix} 1 & & & x_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & x_{k-1} & & & \\ & & & x_k & & & \\ & & & x_{k+1} & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & x_n & & & 1 \end{vmatrix} = x_k$$

Om $x_k = 0$ så har vi noll-rad, så matrisen är ej inverterbar och har determinant 0. Om $x_k \neq 0$, så kan vi elliminera alla x_n utom x_k med radoperationer och få determinanten =
$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot x_k \cdot 1 \cdots 1 = x_k$

VSV.

TENTAMEN 2014-08-22

Problem 1:

Betrakta följande två linjer på parameterform i $\mathbb{R}^3$

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 1 \\ z = 2t + 2 \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = -s \\ y = ks + 3 \\ z = -s - 1 \quad \text{för alla } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna ℓ_1 och ℓ_2 då $k = 1$. [2 poäng]

b) Bestäm de värde på $k \in \mathbb{R}$ så att linjerna ℓ_1 och ℓ_2 **ej skär varandra.** [3 poäng]

b) $$\begin{cases} 2t+3 = -s \\ -4t+1 = ks+3 \\ 2t+2 = -s-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + s = -3 \\ -4t - ks = 2 \\ 2t + s = -3 \end{cases}$$ skrives på matrisform

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -k & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{(3)-(1)}{\overset{(2)+2\cdot(1)}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2-k & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad (*)$$

Lösning saknas om $k = 2$.

SVAR: Ingen skärningspunkt för $k = 2$.

a) Då $k = 1$ så blir $(*)$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \overset{(1)-(2)}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ s = -4 \end{array}$$

SVAR: Detta ger $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Problem 2:

Låt

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & a+6 \end{pmatrix}.$$

a) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ är kolonnerna i A tre linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^3$?

[2 poäng]

b) För vilka värde på $a \in \mathbb{R}$ är A inverterbar? [1 poäng]

c) Invertera A då $a = 0$ (om möjligt). [2 poäng]

a) Linjärt beroende om Gausselimineringen en nollrad.
Börjar med radbyte för att undvika problem om $a=0$.

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & a+6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 2 & 3 \\ -1 & 3 & a+6 \end{pmatrix} \underset{\substack{(2)-a\cdot(1) \\ (3)+(1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3+a \\ 0 & 3 & a+5 \end{pmatrix} \underset{2\cdot(3)-3\cdot(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3+a \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

SVAR: Linjärt beroende kolumnvektorer om $a=1$

Alternativ: Räkna ut det(A). Linjärt beroende kolumnvektorer om och endast om det(A)=0.

b) A inverterbar $\Leftrightarrow$ linjärt oberoende kolumner $\Leftrightarrow$ $a \neq 1$

SVAR: $a \neq 1$

c)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)+(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{2\cdot(3)-3\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{(1)+(3) \\ (2)-3\cdot(3)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

SVAR: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Problem 3:

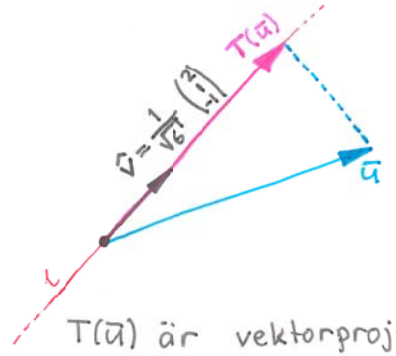
a) Bestäm standardmatrisen för $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, där T projicerar varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ortogonalt på följande linjen

$$\ell : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[4 poäng]

b) Är avbildningen T en $1-1$ avbildning? Förklara! [1 poäng]

a)



$T(\bar{u})$ är vektorprojektionen

$T(\bar{u}) = (\bar{u} \cdot \hat{v})\hat{v}$

$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-1) \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

SVAR: Avbildningsmatrisen är $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) SVAR: Nej!

Gäller allmänt att projektioner inte är 1-1.
I figuren ovan är t ex $\bar{u} \neq T(\bar{u})$ men $T(T(\bar{u})) = T(\bar{u})$, så vi har två olika vektorer som båda avbildas på $T(\bar{u})$. Alltså inte 1-1.