

### L3 Vektorprodukt

1

Definition För vektorer i  $\mathbb{R}^3$  definieras vi vektorprodukten

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

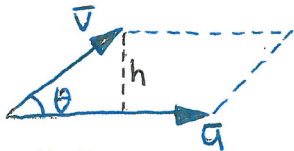
$\begin{matrix} u_1 & & v_1 \\ & \times & v_2 \\ u_2 & & v_2 \\ & \times & v_3 \\ u_3 & & v_3 \end{matrix}$

Några egenskaper

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \cancel{u_1 u_2 v_3} - \cancel{u_1 u_3 v_2} + \cancel{u_2 u_3 v_1} - \cancel{u_1 u_2 v_3} + \cancel{u_1 u_3 v_2} - \cancel{u_2 u_3 v_1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= v_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + v_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + v_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \cancel{u_2 v_1 v_3} - \cancel{u_3 v_1 v_2} + \cancel{u_3 v_1 v_2} - \cancel{u_1 v_2 v_3} + \cancel{u_1 v_2 v_3} - \cancel{u_2 v_1 v_3} = 0 \end{aligned}$$

$\vec{u} \times \vec{v}$  är alltså vinkelrät mot både  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$



$A = \text{Parallelogramarean} = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin(\theta)$

$$\begin{aligned} A^2 &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2(\theta) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2(\theta) \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= \cancel{u_1^2 v_1^2} + \cancel{u_1^2 v_2^2} + \cancel{u_1^2 v_3^2} + \cancel{u_2^2 v_1^2} + \cancel{u_2^2 v_2^2} + \cancel{u_2^2 v_3^2} + \cancel{u_3^2 v_1^2} + \cancel{u_3^2 v_2^2} + \cancel{u_3^2 v_3^2} \\ &\quad - \cancel{u_1^2 v_1^2} - \cancel{u_2^2 v_2^2} - \cancel{u_3^2 v_3^2} - \cancel{2u_1 v_1 u_2 v_2} - \cancel{2u_1 v_1 u_3 v_3} - \cancel{2u_2 v_2 u_3 v_3} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 \end{aligned}$$

Vi har alltså visat de två första av följande

viktiga egenskaper för  $\vec{u} \times \vec{v}$

i)  $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

ii)  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin(\theta) = \text{arean för parallelogrammet med sidor } \vec{u} \text{ och } \vec{v}$   
där  $\theta = \text{vinkeln mellan } \vec{u} \text{ och } \vec{v}, 0 \leq \theta \leq \pi$

iii)  $\vec{u}, \vec{v}$  och  $\vec{u} \times \vec{v}$  är riktade enligt högerhandsregeln,  
dvs om man riktar tummen i  $\vec{u}$ s riktning och långfingret i  $\vec{v}$ s riktning så är  $\vec{u} \times \vec{v}$  vinkelrät mot  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  och i den riktning som kan anges med långfingret.

② Adams försöker motivera egenskapen i(i) mitt på sidan 581 med ett argument som inte känns riktigt övertygande, men i) och ii) är hur som helst de viktigaste och vi kan tex enkelt kalla i(i) i något specialfall och nöjer oss med det:

$$\text{Ex: } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonal mot  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  samt riktad enligt högerhandsregeln

$$|\vec{u} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 1 \\ -1 + 1 \\ -1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(väntat då  $\theta = \pi$  i detta fall)

$$\text{i(i)} \text{ och i(ii)} \Rightarrow \boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}}$$

Från definitionen av vektorprodukt kan man också visa att

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \\ (t\vec{u}) \times \vec{v} &= \vec{u} \times (t\vec{v}) = t(\vec{u} \times \vec{v}) \end{aligned}$$

**OBS!**  
I allmänhet ser är  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

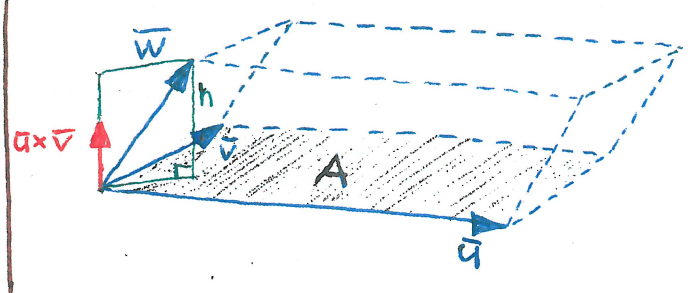
Adams tycker om att skriva vektorer som linjärkombination av enhetsvektorer  $\vec{i}, \vec{j}$  och  $\vec{k}$  i x-, y- och z-axels riktning i  $\mathbb{R}^3$ . Motsvarigheten till definitionen högst upp på sid ① blir då att  $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ ,  $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$  och man kan skriva  $\vec{u} \times \vec{v}$  som "determinanten"

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

↑ utveckla längs rad 1.

$$= \vec{i} (u_2 v_3 - u_3 v_2) - \vec{j} (u_1 v_3 - u_3 v_1) + \vec{k} (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Blir förstås samma resultat, så välj själva vilken notation ni tycker känns smidigast.



En parallelepiped med sidor givna av tre vektorer  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  har volym  $V = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$

Bevis

Volymen  $V =$  bottenytans area multiplicerad med parallelepipedens höjd i en riktning vinkelrät mot bottenytan i figuren ovan.

Men  $|\vec{u} \times \vec{v}| =$  bottenytans area i figuren och  $\vec{u} \times \vec{v}$  är vinkelrät mot bottenytan, så om vi projicerar  $\vec{w}$  på  $\vec{u} \times \vec{v}$  så får vi höjden  $h$  i figuren.

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$h = \left| \frac{\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right|$$

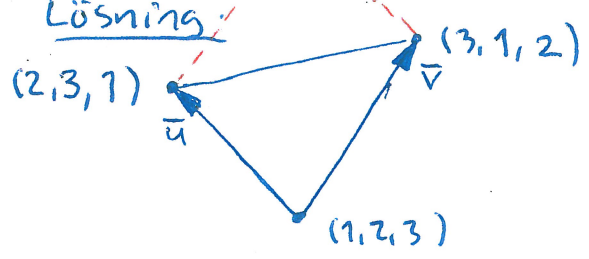
$$V = A h = \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$$

v.s.v.

Räkne exempel

En triangel har hörn i punkterna  $(1,2,3)$ ,  $(3,1,2)$  och  $(2,3,1)$ . Räkna ut triangelns area.

Lösning:



Tva sidor i triangeln ges av vektorerna  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  och  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Triangelarean är halva parallelogramarean  $|\vec{u} \times \vec{v}|$

$$A = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -1-2 \\ -4+1 \\ -1-2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2+3^2+3^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 9} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \text{ areeenheter.}$$