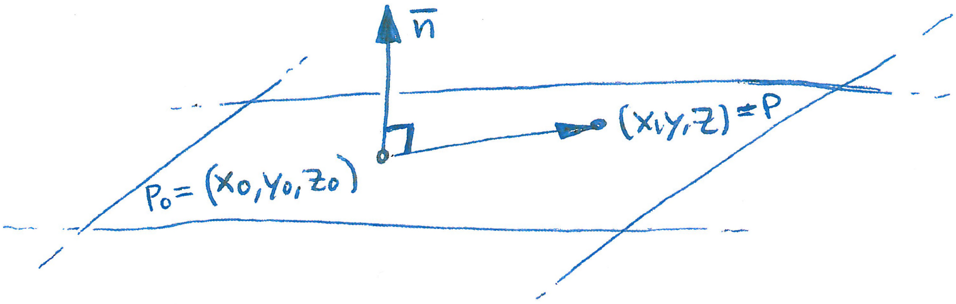
# L 4–5 : Linjer och plan

## Ekvationen för ett plan

En normalvektor för ett plan $P$ är en vektor $\bar{n}$ som är vinkelrät mot planet.




Om vi vet att ett plan har normalvektor $\bar{n}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$ och innehåller punkten $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ så består planet av alla punkter $P=(x,y,z)$ sådana att vektorn $\overrightarrow{P_0P}$ är vinkelrät (ortogonal) mot $\bar{n}$, dvs sådana att

$$\bar{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

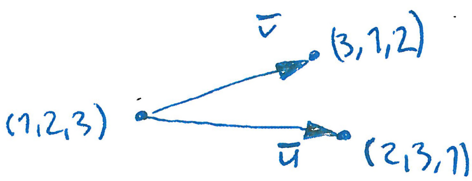
$$\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}=0$$

$\boxed{\text{Planets ekvation: } A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$ För plan genom $(x_0,y_0,z_0)$ med normalvektor $\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$.

### Räkneexempel

Finn ekvation för ett plan genom punkterna $(1,2,3)$, $(3,1,2)$ och $(2,3,1)$. Räkna ut kortaste avståndet från punkten $(3,2,1)$ till detta plan.

### Lösning




$$\bar{u}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\bar{v}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Normalvektor: $\bar{n}=\bar{u}\times\bar{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2\\-4+1\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$

Standard beteckning för "vinkelrät mot"

Punkt i planet: $P_0=(1,2,3)$

Planet består av alla punkter $P=(x,y,z)$ sådana att $\overrightarrow{P_0P}\perp\bar{n}$

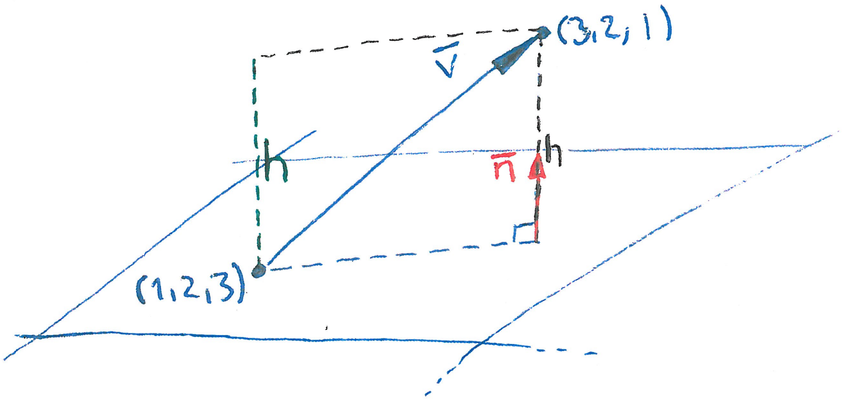
② d v s alla punkter sådana att

$$\bar{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3(x-1) - 3(y-2) - 3(z-3) = 0$$

$$\underline{\underline{3(x-1) + 3(y-2) + 3(z-3) = 0}}$$




Kortaste avståndet från punkten (3,2,1) till planet är längs en linje vinkelrät mot planet, d v s höjden h i figuren. Vektorn $\bar{v}$ i figuren är

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{så att}$$

så att h fås genom skalärprojektionen

$$h = \left| \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{-6 + 0 + 6}{\sqrt{9+9+9}} = 0$$

d v s punkten (3, 2, 1) ligger i planet (kontrolleras lätt genom insättning i planets ekvation).

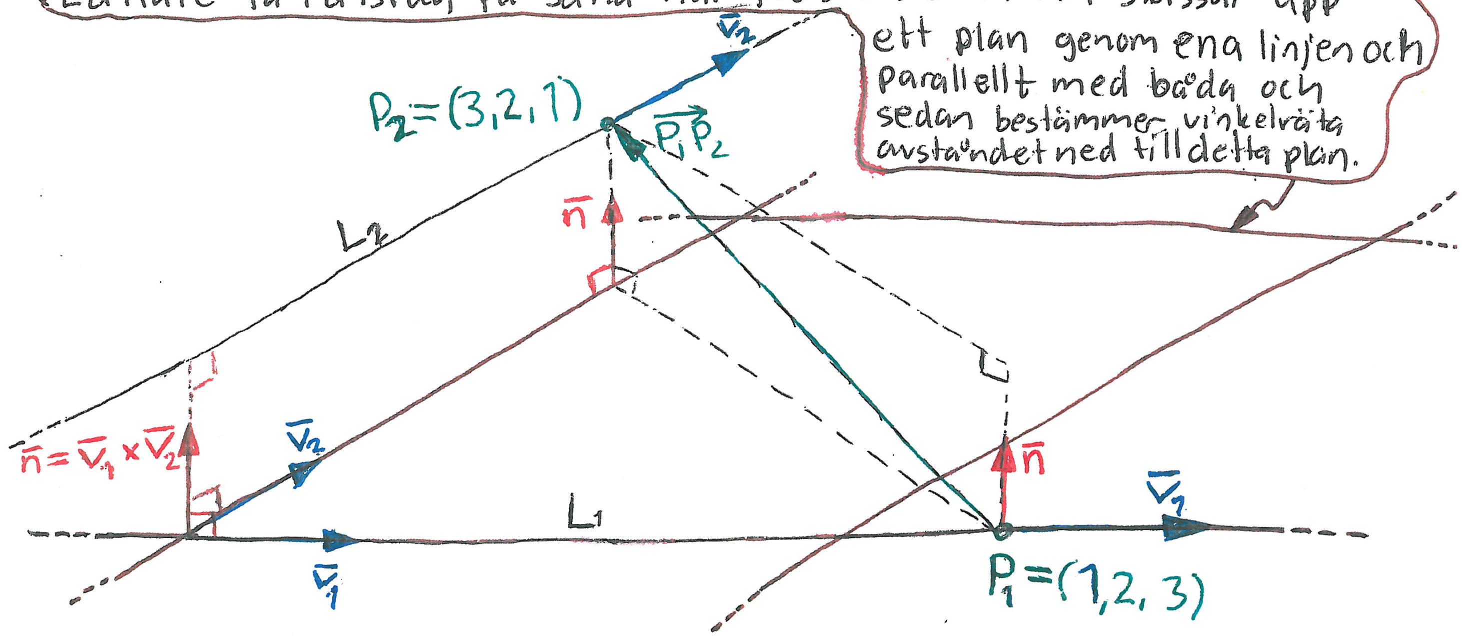
SVAR: $3(x-1) + 3(y-2) + 3(z-3) = 0$
(3, 2, 1) ligger i planet.

## Räkneexempel

Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna

$$L_1: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\bar{u}_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}_{\bar{v}_1} \qquad L_2: \underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}}_{\bar{u}_2} + t\underbrace{\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}}_{\bar{v}_2}$$

Knep:
Lättare få rätsida på såna här problem om man skissar upp ett plan genom ena linjen och parallellt med båda och sedan bestämmer vinkelräta avståndet ned till detta plan.




Normalvektor: $\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-12\\16-4\\6-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Kortaste avståndet mellan $L_1$ och $L_2$ kan nu fås genom att räkna ut skalärprojektionen av $\overrightarrow{P_1P_2}$ på normalvektorn $\bar{n}$.

$$\text{Kortaste avståndet} = \left|\frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \left|\frac{-12-12+6}{6\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\right| = \left|-\frac{18}{6\sqrt{6}}\right| = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Svar: $\frac{3}{\sqrt{6}}$ längdenheter

④ Vi har sett att planet genom $(x_0, y_0, z_0)$ med normalvektor $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ har ekvationen

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax + By + Cz = D \quad \text{med } D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Detta kan utnyttjas för att lösa ekvationssystem med två ekvationer och tre obekanta, som t ex

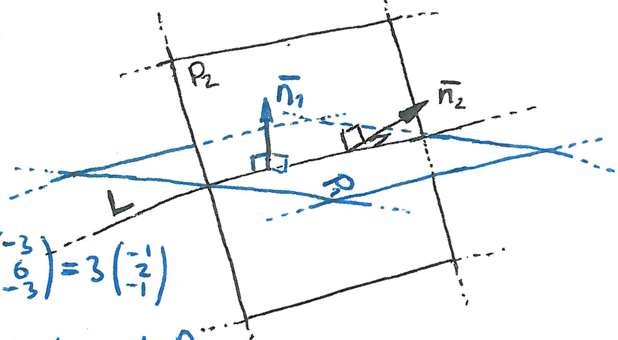
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \longleftarrow P_1 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \longleftarrow P_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Nästa lektion lär vi oss lösa sådana genom Gausseliminering, som ger en fri parameter och lösning på formen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{u} + t\bar{v}$

punkt på linjen

riktningsvektor

Alternativt, se ekvationssystemet som skärningslinjen $L$ mellan två plan $P_1$ och $P_2$ med normalvektorer $\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.




För vektorn så gäller att $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är vinkelrät mot $\bar{n}_1$, så $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är parallell med $P_1$.
$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är vinkelrät mot $\bar{n}_2$, så $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ är parallell med $P_2$.

Alltså är $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en riktningsvektor för $L$.

Vi behöver även veta en punkt på linjen, t ex den punkt man får genom att sätta $x = 0$ i $(*)$:

$$\begin{cases} 2y + 3z = 7 \\ 5y + 6z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{array}\right) \underset{2\cdot(2) - 5\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -19 \end{array}\right) \overset{(1)+(2)}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & -19 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = \frac{19}{3} \end{cases} \Rightarrow P = (0, -6, \tfrac{19}{3}) \text{ punkt på } L_1$$

Linjens ekvation kan alltså skrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

# Alternativ uträkning av skärningslinjen på sid 4

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & (1) \\ 4x + 5y + 6z = 8 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(2)-4\cdot(1)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & (3) \\ -3y - 6z = -20 & (4) \end{cases}$$

sätt $z = t$ (fri variabel)

$$\Downarrow (4)$$

$$\left.\begin{aligned} -3y - 6t &= -20 \\ 3y &= 20 - 6t \\ y &= \frac{20}{3} - 2t \end{aligned}\right\} \overset{(3)}{\Longrightarrow} x + 2\left(\frac{20}{3} - 2t\right) + 3t = 7$$

$$x = \frac{3\cdot 7}{3} - \frac{40}{3} + t = -\frac{19}{3} + t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3} + t \\ \frac{20}{3} - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Är detta samma linje som vi fick på förra sidan? Klart om (punkten med positionsvektor) $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$ ligger på linjen $(*)$:

$$t = \frac{19}{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3} + \frac{19}{3} \\ \frac{20}{3} - \frac{38}{3} \\ 0 + \frac{19}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{18}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

## Linjens ekvation

Parameterform: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

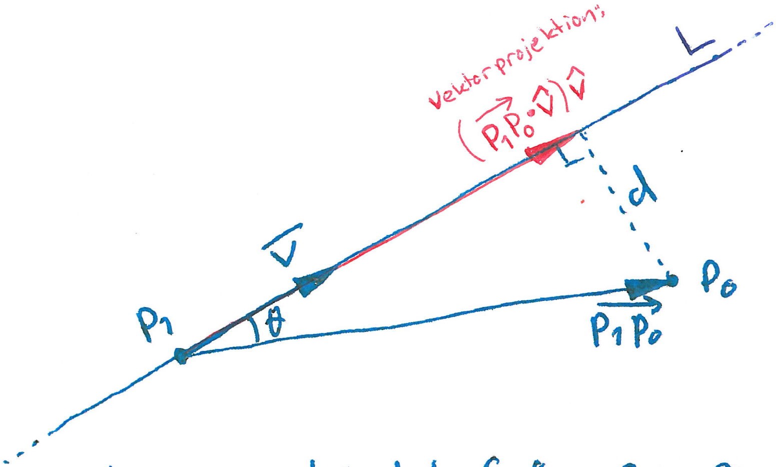
$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

Standardform: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

## Avstånd punkt-linje




Alternativ

$d = \left| \overrightarrow{P_1P_0} - (\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \hat{v})\hat{v} \right|$

eller via Pythagoras sats

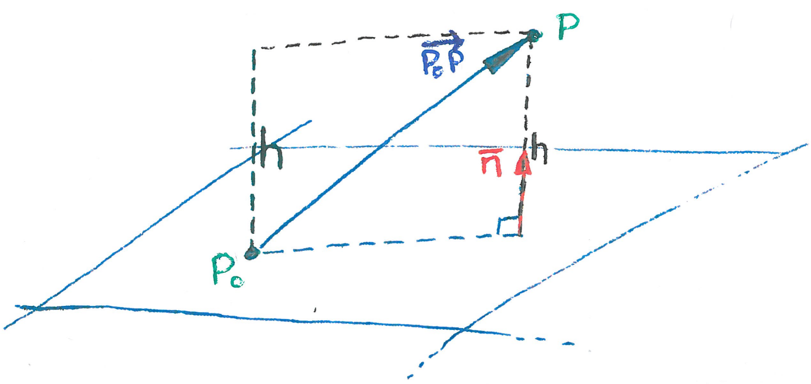
$d = \sqrt{|\overrightarrow{P_1P_0}|^2 - |(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \hat{v})\hat{v}|^2}$

Kortaste avståndet från en punkt $P_0$ till linjen L genom $P_1$ och med riktningsvektor $\bar{v}$ är

$$d = |\overrightarrow{P_1P_0}| \sin(\theta) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin(\theta)}{|\bar{v}|} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|}$$

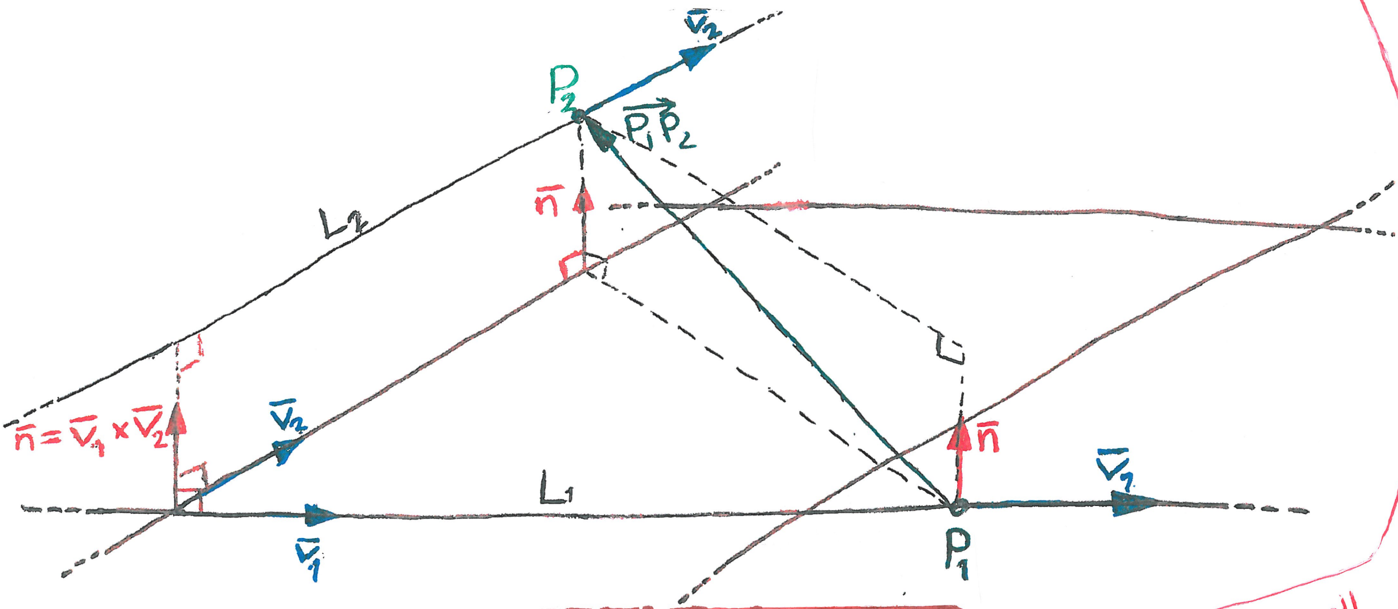
Sammanfattning av avståndsformler för linjer och plan följer på nästa sida.

## ⑥ Avstånd från punkt till plan




$$\boxed{h = \left| \frac{\overrightarrow{P_0P} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right|}$$

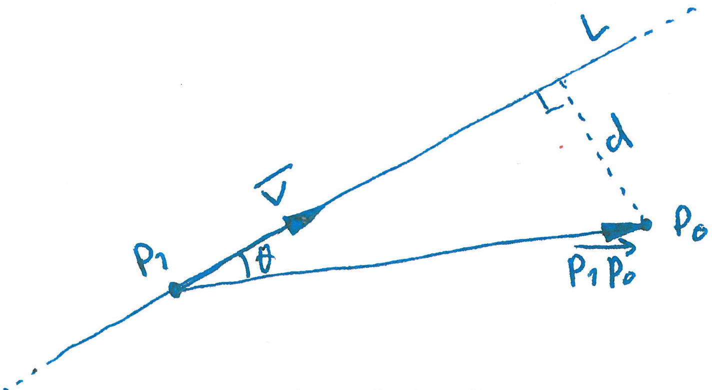
## Kortaste avståndet mellan två linjer




$$\boxed{\text{Kortaste avståndet} = \left| \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right|}$$

OBS! Samma formel!

## Avstånd från punkt till linje



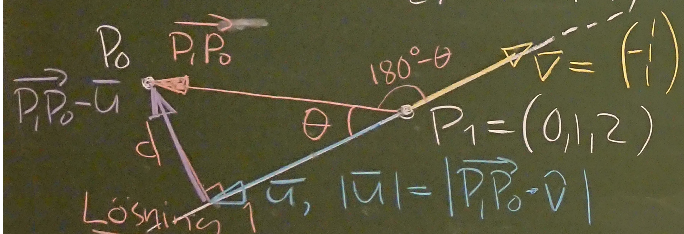

Kortaste avståndet från en punkt $P_0$ till linjen $L$ genom $P_1$ och med riktningsvektor $\bar{v}$ är

$$\boxed{d = |\overrightarrow{P_1P_0}| \sin(\theta) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin(\theta)}{|\bar{v}|} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|}}$$

# Lektion 5 2018-11-09:
# Räkneexempel för tre sätt att räkna ut avstånd punkt-linje

## Avstånd punkt-linje

Räkna ut avståndet från punkten $(1,2,3) = P_0$ till linjen $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.




Lösning 1

$$\text{Sökt } d = |\overrightarrow{P_1P_0}|\sin(\theta) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}|\cdot|\bar{v}|\sin(180° - \theta)}{|\bar{v}|} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \times \bar{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-(-1)\\1-1\\-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_0} \times \bar{v}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$d = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{3}$$

Lösning 2

$\bar{u}$ = vektorprojektionen av $\overrightarrow{P_1P_0}$ på $\bar{v}$

$$= \underbrace{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \hat{v})}_{\pm|\bar{u}|}\hat{v} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\hat{v}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1-1+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$d = |\overrightarrow{P_1P_0} - \bar{u}| = \left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{2}{3}\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Lösning 3 (Pythagoras)

$$|\overrightarrow{P_1P_0}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}$$

$$|\bar{u}| = |\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \hat{v}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}|(1-1+1)| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{P_1P_0}|^2 - |\bar{u}|^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

$$|\bar{u}|^2 + d^2 = |\overrightarrow{P_1P_0}|^2$$
$$d^2 = |\overrightarrow{P_1P_0}|^2 - |\bar{u}|^2$$
$$d = \sqrt{|\overrightarrow{P_1P_0}|^2 - |\bar{u}|^2}$$

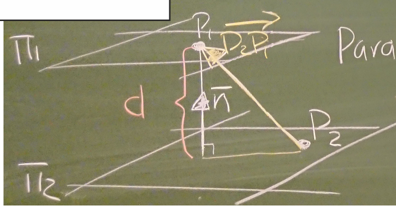
---

E&E Problem 1.5.2

Finn avståndet mellan planen

$\Pi_1:\ 2x - 3y + 4z = 5$, normalvektor $n = \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$

$\Pi_2:\ 4x - 6y + 8z = 16$ normalvektor $\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix} = 2\bar{n}$




Parallella plan

Sökt: $d = |$ skalärprojektionen av $\overrightarrow{P_2P_1}$ på $\hat{n}\,|$

Fortsättning på lösning av problemet till höger:

Välj $P_1 = (1,-1,z)$: $2\cdot1 - 3\cdot(-1) + 4z = 5 \Rightarrow z = 0$

Välj $P_2 = (0,0,z)$: $4\cdot0 - 6\cdot0 + 8z = 16 \Rightarrow z = 2$

Vi har alltså $P_1 = (1,-1,0) \in \Pi_1$, $P_2 = (0,0,2) \in \Pi_1$ och

$$d = \left|\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\hat{n}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\right| = \frac{|2+3-8|}{\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$