L~~8~~7 Linjära ekvationssystem, Gausselliminering

Linjär ekvation: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b$$

koefficient

variabel

Ex: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$

$x + 3y + 5z = 8$

$\sqrt{7}(x_1 + 3(x_2 + 8(x_3 + x_4))) = e^{\sqrt{7}}$

är alla linjära. Den senare kan nämligen skrivas

$\sqrt{7}x_1 + 3\sqrt{7}x_2 + 24\sqrt{7}x_3 + 24\sqrt{7}x_4 = e^{\sqrt{7}}$.

Följande ekvationer är inte linjära:

$3x_1 + 4x_2 x_3 = 7$

$x_1 + 2\sqrt{x_2} = 4$

Ett linjärt ekvationssystem är en följd av ekvationer som har gemensamma variabler, t ex

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 &= 9, \end{aligned}$$

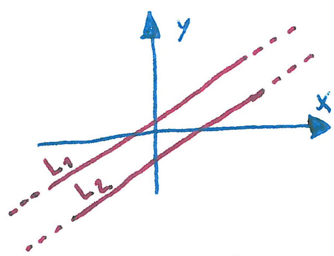
Specialfallet två ekvationer och två obekanta

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Båda kan skrivas på formen $y = kx + m$ och är alltså ekvationer för två stycken linjer L_1 och L_2.

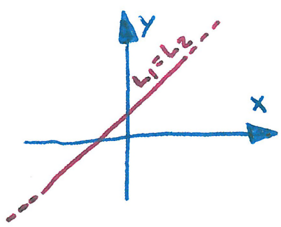
Tre möjligheter:

1) Parallella linjer, ingen skärningspunkt, ingen lösning



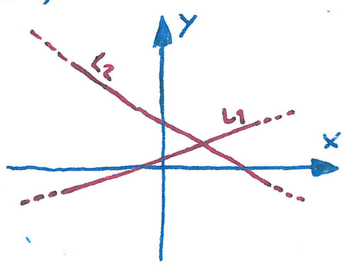
Ingen punkt (x,y) ligger på båda linjerna.

2) $L_1 = L_2$; oändligt många skärningspunkter = lösningar



Varje punkt (x,y) på L_1 ligger även på L_2 och löser alltså båda ekvationerna

3) Exakt en skärningspunkt



Skärningspunkten =
= den enda punkten som ligger på båda linjerna =
= den enda lösningen till båda ekvationerna.

②

Elliminera x_1 från ekvation (2) och (3):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 & (2) \leftarrow \text{Subtrahera bort } 2\cdot(1) \\ -4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 20 & (3) \leftarrow \text{Addera } 4\cdot(1) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

Elliminera x_2 från ekvation (3):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & (1) \\ -2x_2 - 10x_3 = -16 & (2) \\ 12x_2 + 12x_3 = \underbrace{48}_{3\cdot 16} & (3) \leftarrow \text{Addera } 6\cdot(2) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & (1) \\ -2x_2 - 10x_3 = -16 & (2) \\ -48x_3 = -48 & (3) \end{cases}$$

Triangulär form.

(3) $\Rightarrow$ $x_3 = 1$

(2) $\Rightarrow$ $2x_2 = -16 + 10x_3 = -16 + 10 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$

(3) $\Rightarrow$ $x_1 = 7 - 2x_2 - x_3 = 7 - 6 - 1 = 7 - 7 = 0$

Alltså en unik lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$

Istället för att skriva ut x_1, x_2 och x_3 på varje rad så brukar man göra samma räkneoperationer men enbart skriva ut koefficienter och högerled (= de siffror som ändras).

Metoden kallas Gausselliminering

Ex:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \\ -4x_1 + 4x_2 + Ax_3 = B \end{cases}$$

Systemets utökade matris (augmented matrix) är

$$\begin{array}{ccc|c} (x_1 & x_2 & x_3) & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \\ -4 & 4 & A & B \end{array}\right) \begin{array}{l} (2) - 2\cdot(1) \\ (3) + 4\cdot(1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 12 & A+4 & B+28 \end{array}\right) (3) + 6\cdot(2) \sim$$

koefficienter — högerled

$28 - 96 = -68$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & A-56 & B-68 \end{array}\right)$$

Tillåtna radoperationer i varje steg:
Byt plats på två rader eller multiplicera med konstant eller addera konstant $\cdot$ (en rad) till konstant $\cdot$ (annan rad).

Tre olika möjligheter

Specialfall 1: $A = 56$, $B \neq 68$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x_1 & x_2 & x_3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & B-68 \end{array}\right) \end{array} \leftarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = B - 68 \neq 0$$

Ingen lösning!

Specialfall 2: $A = 56$, $B = 68$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} (x_1 & x_2 & x_3) & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Vi har då två ekvationer och tre obekanta från ekvation (2) kan vi t ex låta x_3 vara vad som helst,

$x_3 = t$, t något reellt tal (fri variabel)

och sedan från ekvation (2) och (1):

$$\cancel{-}2x_2 \cancel{-}10x_3 = \cancel{-}16 \iff x_2 = (16-10x_3)/2 = 8-5t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \iff x_1 = 7 - 2x_2 - x_3 = 7 + 10t - 16 - t = -9 + 9t$$

Oändligt många lösningar: $x_3 = t$ (fri variabel)

$x_2 = 8 - 5t$

$x_1 = -9 + 9t$

skrivs ofta på vektorform

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+9t \\ 8-5t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enligt räkneregler för vektorer som kommer på nästa lektion

Specialfall 3: $A \neq 56$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} (x_1 & x_2 & x_3) & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & A-56 & B-68 \end{array}\right) \end{array}$$

$$(3) \iff \underbrace{(A-56)}_{\neq 0} x_3 = B-68 \iff x_3 = \frac{B-68}{A-56}$$

$$(2) \iff -2x_2 - 10x_3 = -16 \iff x_2 = 8 - 5x_3 = 8 - 5\frac{B-68}{A-56}$$

$$(1) \iff x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \iff x_1 = -2x_2 - x_3 + 7 = -16 + 10x_3 - x_3 + 7 = -9 + 9\frac{B-68}{A-56}$$

Systemets matris är här i trappstegsform. Kan förenklas mer, t ex i fallet $A = 8$ och $B = 20$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & -48 & -48 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (2)/(-2) \\ (3)/48 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (1)-(3) \\ (2)-(3)\cdot 5 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (1)-2\cdot(2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

Trappstegsform

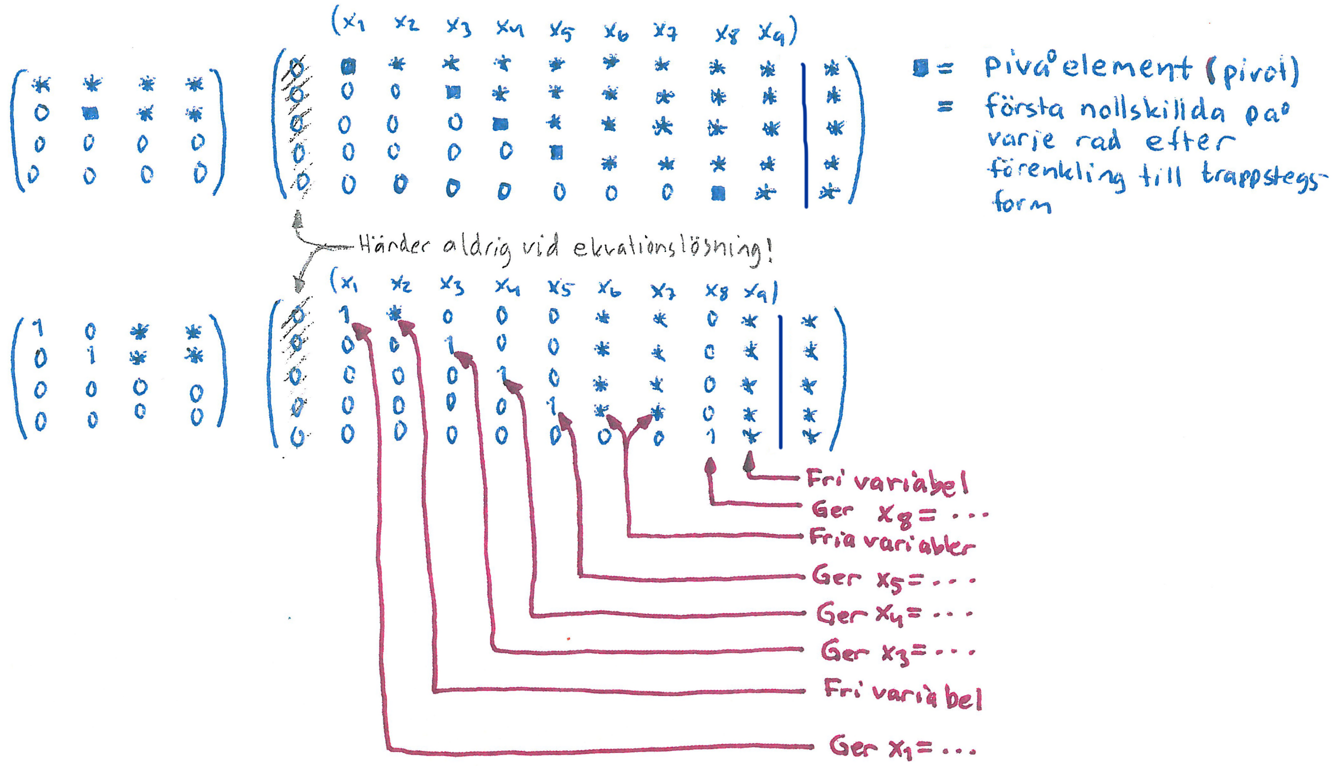
$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} (x_1 & x_2 & x_3) & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \iff \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

Reducerad trappstegsform

Alltså en unik lösning!

(4) Ett ekvationssystem kallas lösbart (consistent) om det har minst en lösning.

Exempel 1, sid 29



Tre möjligheter

1) Om det finns en rad som motsvarar en ekvation $0 = B \neq 0$ så saknar ekvationssystemet lösning.

2) Ett pivåelement i varje kolumn $\Rightarrow$ exakt en lösning

3) Annars: Minst en fri variabel $\Rightarrow$ oändligt många lösningar

Ekvationssystemet från lektionen på matrisform

> $with(LinearAlgebra);$
$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \\ -4 & 4 & A & B \end{bmatrix};$$

[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CARE, CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace, CompanionMatrix, CompressedSparseForm, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation, CrossProduct, DARE, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct, EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, FromCompressedSparseForm, FromSplitForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape, GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix, HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix, JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUDecomposition, LeastSquares, LinearSolve, LyapunovSolve, Map, Map2, MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower, MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize, NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, ProjectionMatrix, QRDecomposition, RandomMatrix, RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, SplitForm, StronglyConnectedBlocks, SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, SylvesterSolve, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm, UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip]

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \\ -4 & 4 & A & B \end{bmatrix} \tag{1}$$

> $M2 := GaussianElimination(M);$

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & A-56 & B-68 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Här får man se upp och observera att följande inte gäller om A=56, ty då fås division med 0

> $M3 := ReducedRowEchelonForm(M)$

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9\,(-B+12+A)}{A-56} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5\,B-108+8\,A}{A-56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{B-68}{A-56} \end{bmatrix} \tag{3}$$

> ?*subs*

Specialfallet som gav oändligt många lösningar på lektionen:

> $M3 := subs(\{A=56, B=68\}, M);$

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \\ -4 & 4 & 56 & 68 \end{bmatrix} \tag{4}$$

> $LinearSolve(M3)$

$$\begin{bmatrix} -9+9\,\_t_3 \\ 8-5\,\_t_3 \\ \_t_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Specialfallet som gav unik lösning på lektionen:

> $M4 := subs(\{A=8, B=20\}, M);$

$$M4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \\ -4 & 4 & 8 & 20 \end{bmatrix} \tag{6}$$

> $LinearSolve(M4)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Nytt exempel med två fria variabler

Vi skall se på nästa lektion att lösningsmängden (=mängden av alla lösningar) då kan tolkas geometriskt som ett plan.

> *restart*;
> *with*(*LinearAlgebra*) :

Maple förenklar automatiskt varje matriselement där det är möjligt

> $$M := \begin{bmatrix} \mathrm{Pi} & \mathrm{sqrt}(7) & \exp\left(\frac{1}{2}\right) & \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right) \\ -\mathrm{Pi} & -\mathrm{sqrt}(7) & \exp\left(\frac{1}{2}+I\cdot\mathrm{Pi}\right) & \cos(\mathrm{Pi}) \\ 2\cdot\mathrm{Pi} & \mathrm{sqrt}(28) & \exp\left(\frac{1}{2}+\ln(2)\right) & \mathrm{sqrt}(4) \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{7} & e^{\frac{1}{2}} & 1 \\ -\pi & -\sqrt{7} & e^{\frac{1}{2} + I\pi} & -1 \\ 2\pi & 2\sqrt{7} & e^{\frac{1}{2} + \ln(2)} & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

> $x := LinearSolve(M);$

$$x := \begin{bmatrix} -\dfrac{-1 + \sqrt{7}\ \_t_2 + e^{\frac{1}{2}}\ \_t_3}{\pi} \\ \_t_2 \\ \_t_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

I fallet med två fria variabler kommer vi nästa lektion att se att lösningsmängden (=mängden av alla lösningar) är ett plan. En positionsvektor för en punkt i planet fås genom att i (9) sätta _t2=_t3=0. I Maple kan man göra detta på följande sätt:

> $p := subs([\_t[2] = 0, \_t[3] = 0], x);$

$$p := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Två vektorer parallella med planet fås genom att välja två andra punkter *p1* och *p2* i planet och räkna ut motsvarande vektorer *v1* från *p* till *p1*, respektive *v2* från *p* till *p2*.

> $p1 := subs([\_t[2] = 1, \_t[3] = 0], x);$
> $p2 := subs([\_t[2] = 0, \_t[3] = 1], x);$
> $v1 := p1 - p;$
> $v2 := p2 - p;$

$$p1 := \begin{bmatrix} -\dfrac{-1 + \sqrt{7}}{\pi} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

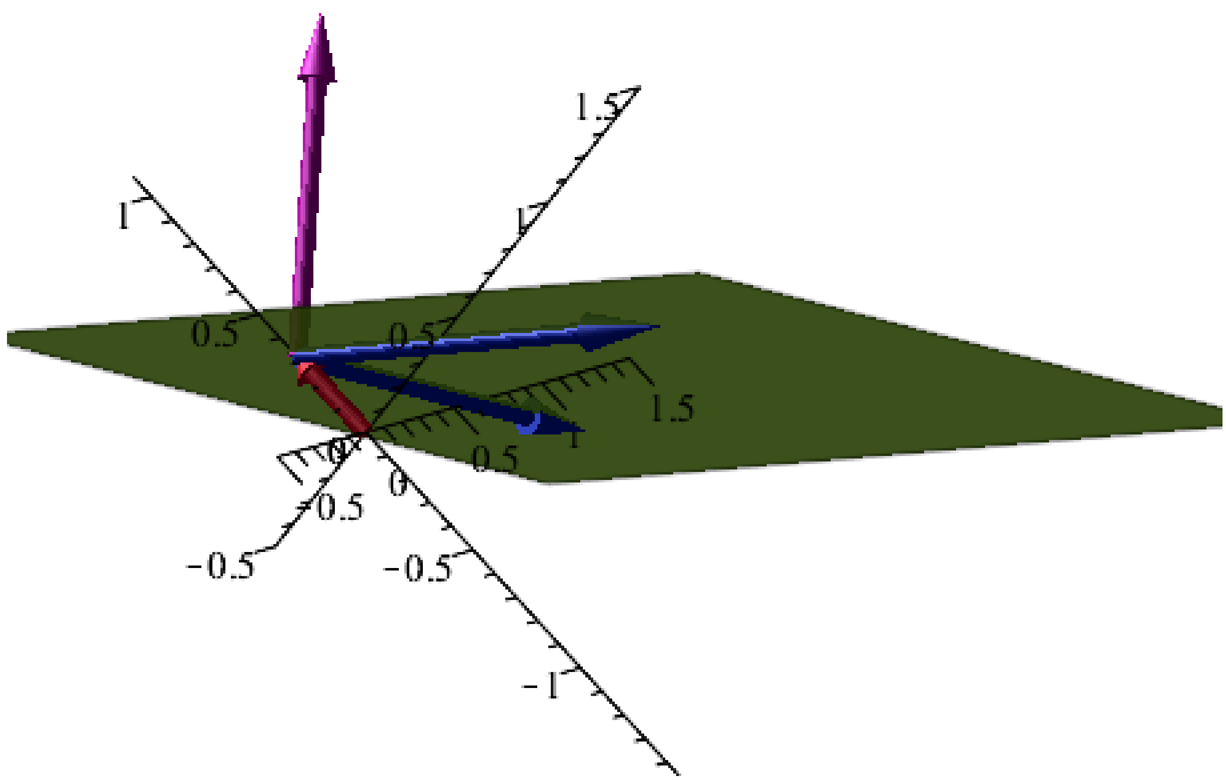
$$p2 := \begin{bmatrix} -\dfrac{-1 + e^{\frac{1}{2}}}{\pi} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v1 := \begin{bmatrix} -\frac{-1+\sqrt{7}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} -\frac{-1+e^{\frac{1}{2}}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

Med följande kommando kan man sedan plotta upp detta plan (samt vektorerna v1, v2 och planets normalvektor):

```
> with(Student[LinearAlgebra]) :
  PlanePlot({v1, v2}, p)
```



Graph of a plane and related vectors. Included on the graph: the plane (leafgreen), a normal to the plane (purple), two basis vectors for the plane (navy), a vector (burgundy) from the origin to a specified point on the plane

>