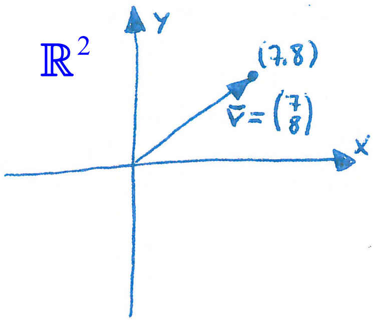
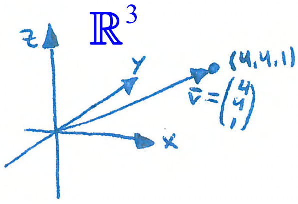
L 9-10 Vektor- och matrisekvationer

Matriser med bara en kolumn kallas vektorer, $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Specialfallen $n=2$ och $n=3$ kan tolkas som positionsvektor för en punkt i planet resp. rummet.





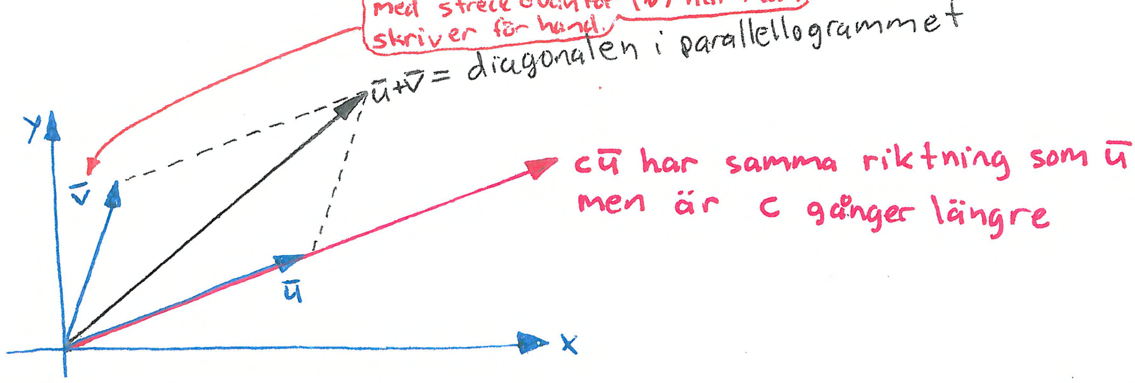
Vektorer har en storlek och en riktning (motsvarar t ex en förflyttning 7 i x-led och 8 i y-led i första exemplet ovan). Storleken = "längden på pilen" = $\sqrt{7^2+8^2}$ (pythagoras).

Addition:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation med $\underbrace{\text{skalär}}_{\text{=vanligt reellt tal}}$ (scalar):
$$c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c\, x_n \end{pmatrix}$$

Geometrisk tolkning:

Att något är en vektor anges ofta genom att använda fetstil ($\mathbf{v}$) i tryckt text, eller med streck ovanför ($\bar{v}$) när man skriver för hand.



Ger räkneregler som för vanliga tal (t ex $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$, $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$, $c(d\bar{u})=(cd)\bar{u}$), se blå ruta sid 43 i boken.

② En linjär-kombination av vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_p$ är en summa av typen $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_p\bar{v}_p$, c_n skalärer.

Vanlig fråga: Kan en vektor $\bar{u}$ skrivas som linjärkombination av vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_p$?

<u>Ex:</u> $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Finns skalärer c_1, c_2 sådana att

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{u} \ ?$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 + 5c_2 \\ -5c_1 + 6c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Notera att detta är ekvations-systemet
$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ -2c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = -3 \end{cases}$$
på matrisform.

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{cc} (c_1 & c_2) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (2)+2\cdot(1) \\ (3)+5\cdot(1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{9}\cdot(2) \\ \frac{1}{16}\cdot(3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (3)-2 \end{array} \sim \begin{array}{c} (c_1 \quad c_2) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Alltså finns exakt en lösning: $c_2 = 2$, $c_1 = 7 - 2c_2 = 7 - 4 = 3$

<u>Allmänt:</u> Ekvationen $x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{b}$ har samma lösning(ar) (ingen, en eller oändligt många) som ekvationssystemet med utvidgad matris

$$\begin{array}{c} (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n & \bar{b} \end{array}\right) \end{array}$$

<u>Ex:</u> Lös $a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Skrivet på matrisform blir detta

$$\begin{array}{c} (a \quad b \quad c \quad d) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /3 \end{array} \sim \begin{array}{c} (a \quad b \quad c \quad d) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

d fri variabel; $d = t$, $t \in \mathbb{R}$

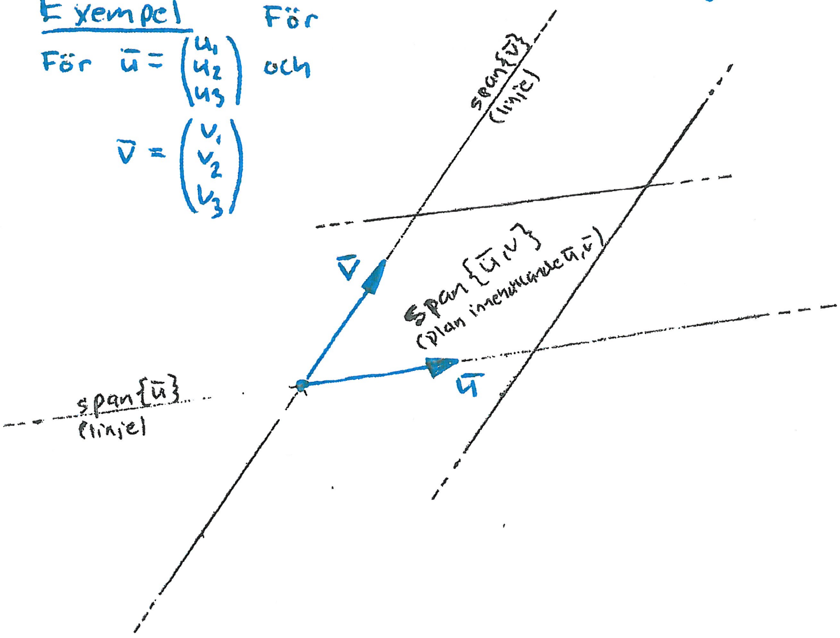
$$\left.\begin{array}{l} (3) \Rightarrow \ c = 3 - 2d = 3 - 2t \\ (2) \Rightarrow \ b = 6 - 2c = 6 - 6 + 4t = 4t \\ (3) \Rightarrow \ a = 7 - 2d = 7 - 2t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2t \\ 4t \\ 3-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ kallas linjära höljet till $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$, eller på Engelska, $\text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$

Exempel För

För $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ och

$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$



Multiplikation av matris och vektor

För en matris A med kolumnvektorer $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$

viktigt!

och för en vektor $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ så definieras produkten

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 + \dots + x_n \bar{a}_n . \quad (*)$$

Matrisekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ är alltså samma som vektorekvationen $x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}$

Från motsvarande räkneregler för vektorer och skalärer (sid 27)

fås att $A(\bar{u} + \bar{v}) = A\bar{u} + A\bar{v}$ och $A(c\bar{u}) = c(A\,u)$

Theorem 4

Följer även att följande påståenden är ekvivalenta (dvs antingen är alla sanna eller så är alla falska):

(a) Varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^m$ kan skrivas som en linjärkombination av kolumnvektorerna i A.

(b) För varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^m$ har ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ minst en lösning.

(c) A omskriven i trappstegsform med Gausseliminering har ett pivåelement på varje rad.

När dessa är sanna säger man att kolumnvektorerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$.

4

Bevis

Att (a) $\Leftrightarrow$ (b) följer direkt ur (*).

Återstår att visa att (b) $\Leftrightarrow$ (c), dvs att

$\underbrace{\text{(c) sant} \Rightarrow \text{(b) sant}}_{1}$ och att $\underbrace{\text{(C) falskt} \Rightarrow \text{(b) falskt}}_{2}$

1: Antag att (c) är sant och applicera radoperationer på $[A\ \bar{b}]$ för godtyckligt $\bar{b}$ så att

$$[A\ \bar{b}] \sim [T\ \bar{d}]$$

där T är på trappstegsform med nollskillt pivå-element på varje rad. Då finns minst en lösning, ty enda möjligheten att inte få någon lösning är om sista raden blir på formen $0 = d_n \neq 0$.

2: Omvänt, antag att (c) är falskt och T som ovan. Då är $\left[T \,\middle|\, \begin{smallmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{smallmatrix}\right]$ ett icke lösbart system, ty T har inget nollskillt element på sista raden. Eftersom radoperationer är inverterbara (se sid **22-23**) så kan systemet skrivas om som

$$\left[T \,\middle|\, \begin{matrix}1\\1\\ \vdots \\ 1\end{matrix}\right] \sim [A \,|\, \bar{b}] \text{ för } n$$

för någon vektor $\bar{b}$ sådan att $A\bar{x} = \bar{b}$ ej är lösbar.

VSV.

Teorem 4 i praktiken

Grundfrågan där är om varje $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ kan skrivas

$$\bar{b} = \underbrace{\overset{\text{Matrisekvation}}{A\bar{x}} = \overset{\text{vektorekvation}}{x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n}}_{\text{Två sätt att skriva samma sak.}}$$

Vill man undersöka detta så Gausseliminerar man:

$$(A \,|\, \bar{b}) \sim \cdots \sim (T \,|\, \vdots)$$

Matris på trappstegsform

Nytt högerled

Enda sättet som det kan skita sig så att ingen lösning finns är om sista raden i T bara innehåller nollor (= inget pivåelement), för då finns det $\bar{b}$ som efter Gauseliminering ger en sista rad $0 = $ (nånting nollskilt). (Mer formellt bevis ovan och i läroboken.)

1.4.18 Spänner kolumnvektorerna i följande matris upp $\mathbb{R}^4$?

$$B=\begin{pmatrix}1&4&1&2\\0&1&3&-4\\0&2&6&7\\2&9&5&-7\end{pmatrix}\underset{(4)-2\cdot(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&1&2\\0&1&3&-4\\0&2&6&7\\0&1&3&-11\end{pmatrix}\underset{\substack{(3)-2\cdot(2)\\(4)-(2)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&1&2\\0&1&3&-4\\0&0&0&15\\0&0&0&-7\end{pmatrix}\underset{15\cdot(4)+7(3)}{\sim}$$

Eller $(4)+\frac{15}{7}(3)$

$$\sim\begin{pmatrix}1&4&1&2\\0&1&3&-4\\0&0&0&15\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Bara nollor på sista raden (= inget pivåelement). Alltså finns $\bar{u}\in\mathbb{R}^4$ så att $B\bar{x}=\bar{u}$ saknar lösning, dvs kolumnvektorerna i B spänner inte upp $\mathbb{R}^4$.

(Eftersom kolumnvektorerna har 4 element så ligger varje linjärkombination av dem i $\mathbb{R}^4$, så ingen vektor i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som sådan linjärkombination.)

Notera att om tex

$$A=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})\text{ och }\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

så är

$$A\bar{x}=[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{x}=[x_1\bar{a}+x_2\bar{b}+x_3\bar{c}]=\left[x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}x_1a_1+x_2b_1+x_3c_1\\x_1a_2+x_2b_2+x_3c_2\\x_1a_3+x_2b_3+x_3c_3\end{bmatrix}$$

Allmänt gäller (oavsett storlek på matrisen A) att rad nummer k i $A\bar{x}$ är summan av produkter av motsvarande element från rad k i A och från $\bar{x}$.

Tillägg till sid 4

Vad menas med att radoperationer är inverterbara i sista steget av beviset? Vi illustrerar med ett exempel för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{/2}{\overset{(2)-5\cdot(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{(3)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T \quad (*)$$

Inget pivåelement på tredje raden, så $A\bar{x} = \bar{b}$ saknar lösning om Gausseliminering av $(A|\bar{b})$ till exempel ger högerled $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Att radoperationerna är inverterbara innebär att vi kan lägga till högerled $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ till T i $(*)$ och räkna "bakvägen" från höger till vänster och få ett motsvarande $\bar{b}$

$$\left(T \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \underset{(3)+(2)}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \underset{\cdot 2}{\overset{(2)+5\cdot(1)}{\sim}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\overbrace{\begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}^{=A} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Vi såg att vi kunde återställa resultatet för varje radoperation i $(*)$ med en annan radoperation, vilket ger att $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ saknar lösning eftersom

$$\left(A \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(T \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \Longleftrightarrow 0 = 1 \quad \text{Ingen lösning!}$$