

## L10

## L11: Lösningsmängd till linjära ekvationssystem

①

Vi har sett exempel på linjära ekvationssystem med 0, 1 resp oändligt många lösningar. Är det enda möjligheterna? Svar: Ja!

Teorem Ett linjärt ekvationssystem har antingen 0, 1 eller oändligt många lösningar.

Bevis: Antag att det finns mer än en lösning, och välj två olika  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  som löser ekvationssystemet, och skriv det på matrisform

$$A\bar{x}_1 = \bar{b} \quad \text{och} \quad A\bar{x}_2 = \bar{b}, \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2.$$

Sätt  $\bar{x}_0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \neq \bar{0}$ . Då är  $A\bar{x}_0 = A(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \bar{0}$ .

Alltså är  $A(\bar{x}_1 + t\bar{x}_0) = A\bar{x}_1 + tA\bar{x}_0 = \bar{b}$  för alla  $t \in \mathbb{R}$ , så det finns oändligt många lösningar  $\bar{x}_1 + t\bar{x}_0$ . v.s.v.

$\bar{0}$  = envektor med bara nollor.

Ett linjärt ekvationssystem kallas homogent om det kan skrivas som en matrisekvation  $A\bar{x} = \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Det finns alltid minst en lösning, den så kallade triviala lösningen  $\bar{x} = \bar{0}$ .

Teorem

Ett ekvationssystem skrivet som matrisekvationen  $A\bar{x} = \bar{b}$  har antingen ingen lösning eller lika många lösningar som  $A\bar{x} = \bar{0}$ . Mer precist, om  $A\bar{p} = \bar{b}$  så har  $A\bar{x} = \bar{b}$  lösningsmängden  $\{x: x = \bar{p} + \bar{h} \text{ med } A\bar{h} = \bar{0}\}$ .

Bevis:

Klart om  $A\bar{x} = \bar{b}$  saknar lösning.

Antag att det finns något  $\bar{p}$  sådant att  $A\bar{p} = \bar{b}$ .

För varje lösning  $\bar{v}$  till  $A\bar{v} = \bar{0}$  gäller då att

$$A(\bar{p} + \bar{v}) = A\bar{p} + A\bar{v} = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b}.$$

Alltså finns det en lösning  $\bar{x} = \bar{p} + \bar{v}$  till  $A\bar{x} = \bar{b}$  för varje lösning  $\bar{v}$  till  $A\bar{v} = \bar{0}$ .

Detta ger alla lösningar, eftersom varje lösning  $\bar{x}$  till

$A\bar{x} = \bar{b}$  kan skrivas  $\bar{x} = \bar{p} + (\bar{x} - \bar{p})$  där  $A(\bar{x} - \bar{p}) = A\bar{x} - A\bar{p} = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$ .  
v.s.v.

②

Ex:

$$A\bar{v} = \bar{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & P \\ -2 & 6 & -4 & Q \end{array} \right) \xrightarrow{(2)+2 \cdot (1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & P \\ 0 & 0 & 0 & Q+2P \end{pmatrix}$$

Lösning finns om  $Q = -2P$ . Vikan då låta  $v_2$  och  $v_3$  vara fria variabler:  $v_2 = s, v_3 = t, s, t \in \mathbb{R}$

$$v_1 - 3v_2 + 2v_3 = P$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P+3s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

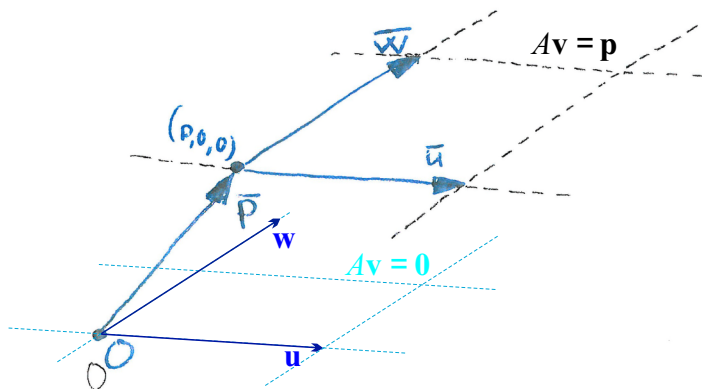
$$= \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \leftarrow \text{Samtliga lösningar } s, t \in \mathbb{R}$$

En separat vektor för varje fri variabel

Samtliga lösningar skrivna på parameterform.

= samtliga lösningar i specialfallet  $P=Q=0$ , dvs samtliga lösningar till  $A\bar{v} = \bar{0}$

$$\bar{v} = \bar{p} + s\bar{u} + t\bar{w}, \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Lösningssmängden är det plan som innehåller punkten  $(P, 0, 0)$  (positionsvektor  $\bar{p}$ ) och är parallellt med vektorerna  $\bar{u}$  och  $\bar{w}$

## Uppg. 1.5.19

Givet:  $x_1 = 5x_4$   
 $x_2 = 3 - 2x_4$   
 $x_3 = 2 + 5x_4$   
 $x_4$  fri variabel

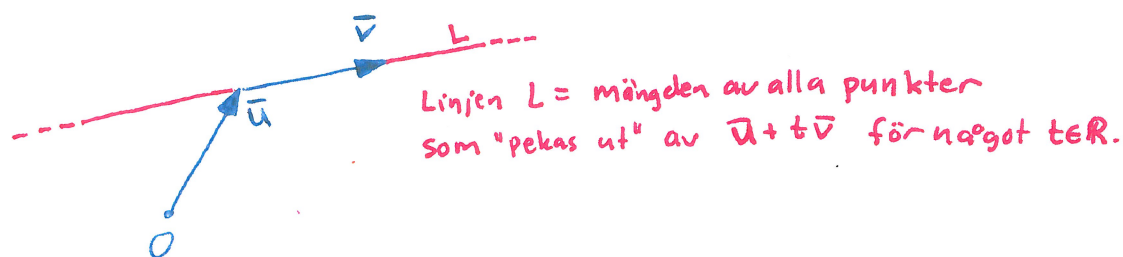
Använd vektoren för att skriva lösningarna som en "linje" i  $\mathbb{R}^4$ .

Med  $x_4 = s$ ,  $s \in \mathbb{R}$  så är

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_4 \\ 3 - 2x_4 \\ 2 + 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5s \\ 3 - 2s \\ 2 + 5s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \quad + \quad s \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

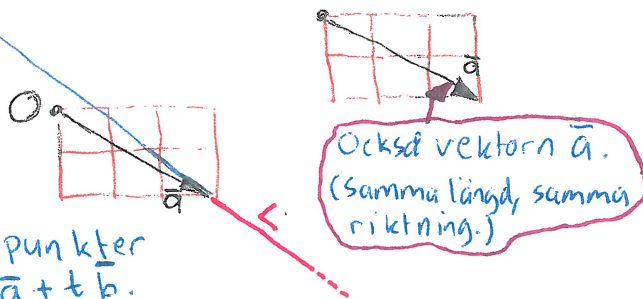
Detta kan tolkas som en linje



## Uppg. 1.5.20

Ange parametrisk ekvation för en linje genom punkten med positionsvektor  $\vec{a}$  och parallell med vektorn  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Svar: Linjen består av alla punkter med positionsvektor  $\vec{a} + t\vec{b}$ .

Ordet positionsvektor ovan anger att vektorn anger riktning och avstånd från origo till en punkt i  $\mathbb{R}^n$ .

Kom ihåg att en vektor är något som har en storlek och en riktning. Den har ingen bestämd position i rummet eller planet. Vektorn  $\vec{v}$  ovan är tex placerad med "startpunkt" vid "spetsen" för vektorn  $\vec{u}$ , men är fortfarande samma vektor  $\vec{v}$  om startpunkten flyttas, tex till D.