L 12-13: Linjärt oberoende, linjära avbildningar

Man säger att en mängd vektorer $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ är **linjärt beroende** om det finns $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (minst en nollskild) sådana att

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_n\bar{v}_n = \bar{0}.$$

(Innebär alltså att en vektor kan flyttas över till högerledet och skrivas som linjärkombination av de övriga.)

Vektorerna kallas **linjärt oberoende** om den homogena ekvationen

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_n\bar{v}_n = 0$$

enbart har triviala lösningen $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Ex: Uppgift 1.7.10 $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix}-3\\9\\15\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-5\\h\end{pmatrix}$

a) För vilka värden på h ligger $\bar{v}_3$ i span$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$?

b) För vilka värden på h är $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ linjärt beroende?

a) För vilka h finns en lösning till ekvationen $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{v}_3$?
Ekvationen skriven på matrisform är

$$\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -5 \\ -5 & 15 & h \end{array} \begin{matrix} \\ \\ (2)+3\cdot(1) \\ (2)+5\cdot(1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10+h \end{array}\right) \underset{(3)-(10+h)\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

SVAR: Inte för något h.

b) För vilka h finns minst en icketrivial lösning till vektorekvationen $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 9 & -5 & 0 \\ 5 & 15 & h & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (c_1 & c_2 & c_3) & \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

SVAR: c_2 fri variabel ⇒ oändligt många lösningar ⇒ linjärt beroende för alla h!

Ex:
Om $A\bar{x} = \bar{0}$ enbart har triviala lösningen så är kolumnerna i A linjärt oberoende.
Om $A\bar{x} = \bar{0}$ har en icketrivial lösning så är kolumnerna i A linjärt beroende.

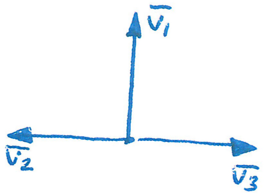
Ex:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{A} & \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)-5\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)+2\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{13} & 0 \end{array}\right)$$

Tre pivåelement ⇒ inga fria variabler och unik lösning ⇒ linjärt oberoende kolumner.

Ex: $\{\bar{0}\}$ linjärt beroende, ty $c_1\bar{0} = \bar{0}$ för varje $c_1 \in \mathbb{R}$.
För $\bar{v} \neq \bar{0}$ så är $c_1 \quad = \bar{0}$ enbart för $c_1 = 0$, så $\{\bar{v}\}$ är linjärt oberoende.
Om $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$ och $\bar{v}_2 \neq \bar{0}$ så är $c\bar{v}_1 + d\bar{v}_2 = \bar{0}$ om $c = d = 0$ eller om $d \neq 0$ och $\bar{v}_2 = -\frac{c}{d}\bar{v}_1$.
$\{\bar{0}, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_m\}$ linjärt beroende, ty $1\cdot\bar{0} + 0\,\bar{v}_2 + 0\,\bar{v}_2 + \cdots + 0\,\bar{v}_m = \bar{0}$.

② **Ex:** 3 vektorer i $\mathbb{R}^2$: $\bar{v}_1 = \binom{0}{1}$, $\bar{v}_2 = \binom{-1}{0}$, $\bar{v}_3 = \binom{1}{0}$



$0\bar{v}_1 + 1\bar{v}_2 + 1\bar{v}_3 = \binom{0}{0}$ så $\{\bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är linjärt beroende
och $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är linjärt beroende

$\bar{v}_2$ kan skrivas som linjärkombination av $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_3$ $(\bar{v}_2 = -\bar{v}_3 + 0\bar{v}_1)$
$\bar{v}_3$ kan skrivas som linjärkombination av $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

$\bar{v}_1$ kan inte skrivas som linjärkombination av $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$.

Teorem 8

Om $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ och $m > n$ så är vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ linjärt beroende.

Bevis

Bilda n×m-matrisen $A = \underbrace{(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_m)}_{m \text{ kolumner}} \Big\} n \text{ rader}, \ n < m.$

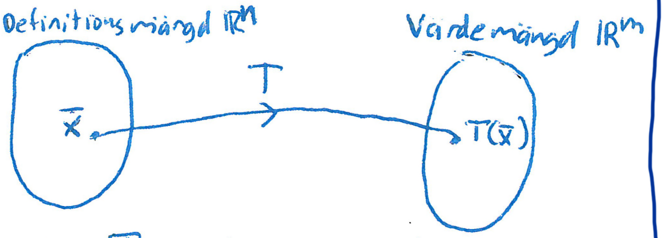
Gausselliminering ger att $[A \mid \bar{0}]$ har maximalt ett pivå-element per rad, men A har fler kolumner än rader, så minst en kolumn saknar pivåelement och ger en fri variabel och oändligt många lösningar för $A\bar{x} = \bar{0}$.
Alltså finns icketrivial lösning och vektorerna är linjärt beroende. VSV.

Exempel

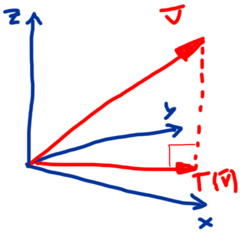
$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ är linjärt beroende.

Linjära avbildningar

En avbildning (eller funktion) T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som parar ihop varje vektor $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$ med en vektor $T(\bar{x})$ i $\mathbb{R}^m$.



Ex $T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$



Avbildningen T sägs vara linjär om det gäller för alla $\bar{u}, \bar{v}$ i $\mathbb{R}^m$ och alla skalärer c_1, c_2 att

$$T(c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2) = c_1 T(u_1) + c_2 T(u_2).$$

Matrisavbildningar

För varje $n \times m$-matris A så kan vi definiera avbildningen $\bar{x} \longmapsto A\bar{x}$. Från räknereglerna för matris-vektormultiplikationer (sid 39 i boken) har vi att $A(c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2) = A(c_1\bar{u}_1) + A(c_2\bar{u}_2) = c_1 A\bar{u}_1 + c_2 A\bar{u}_2$.

Ex: (Uppg 1.8.2)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A\bar{u} = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a + 0 + 0 \\ 0 + \frac{1}{3}b + 0 \\ 0 + 0 + \frac{1}{3}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/3 \\ b/3 \\ c/3 \end{pmatrix}$$

$$A(c_1\bar{u} + c_2\bar{v}) = A\begin{pmatrix} 3c_1 + ac_2 \\ 6c_1 + bc_2 \\ 9c_1 + cc_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(3c_1 + ac_2) \\ \frac{1}{3}(6c_1 + bc_2) \\ \frac{1}{3}(9c_1 + cc_2) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a/3 \\ b/3 \\ c/3 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 A\bar{u} + c_2 A\bar{v}$$

Ex (Uppg. 1.8.4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

För $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, finn $\bar{x}$ sådan att $T(\bar{x}) = \bar{b}$. Är $\bar{x}$ unik?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (x_1 & x_2 & x_3) & \\ 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 6 & -5 \end{array}\right) \underset{(3)-2(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right) \circlearrowleft \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ (3)+(2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{/(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)+2\cdot(2)-3\cdot(3) \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

SVAR: $T\begin{pmatrix} -17 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Unik lösning.

(Kontroll!

$$T\begin{pmatrix} -17 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 + 14 - 3 \\ 0 - 7 + 3 \\ -34 + 35 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$)

Ex 2 sid 65

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

projektion på x_1x_2-planet