L13 Avbildningsmatris

Enhetsmatrisen för $\mathbb{R}^n$: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ Ettor på diagonalen, nollor i övrigt.

Ex: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$I_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\bar{v}_1}{\boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}} & \underset{\bar{v}_2}{\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}} & \underset{\bar{v}_3}{\boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$A\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad A\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vi fick kolumn 1, 2 och 3 i A genom att applicera A på kolumn 1, 2 och 3 i I_3.

Teorem 10

Om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ och $I_n = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n)$ så följer att $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ för alla $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$ och för matrisen

$$A = \left[T(\bar{e}_1) \ \ T(\bar{e}_2) \ \cdots \ T(\bar{e}_n) \right].$$

A är unik (om $T(\bar{x}) = B\bar{x}$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ så är $B = A$) och kallas avbildningens standardmatris.

Bevis

För $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ har vi att

$$\bar{x} = I_n \bar{x} = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \cdots \ \bar{e}_n)\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n.$$

Eftersom T är linjär så följer att

$$T(\bar{x}) = T(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n) = x_1 T(\bar{e}_1) + x_2 T(\bar{e}_2) + \cdots + x_n T(\bar{e}_n)$$

$T(\bar{x}) = A\bar{x}$. Återstår att visa att A är unik.

Låt nu B vara en matris sådan att $T(\bar{x}) = B\bar{x}$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$.

Om vi skriver $A = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n)$ och $B = (\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n)$ så är

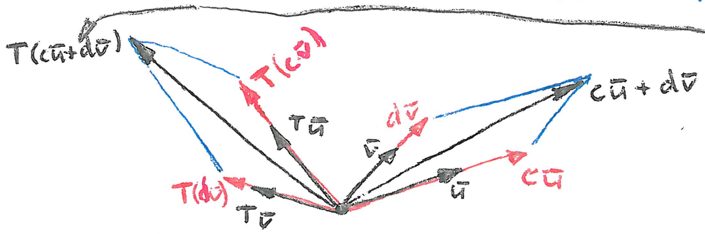
$$\bar{b}_j = B\bar{e}_j = T(\bar{e}_j) = A\bar{e}_j = \bar{a}_j.$$

Alltså är $B = A$.

V.S.V.

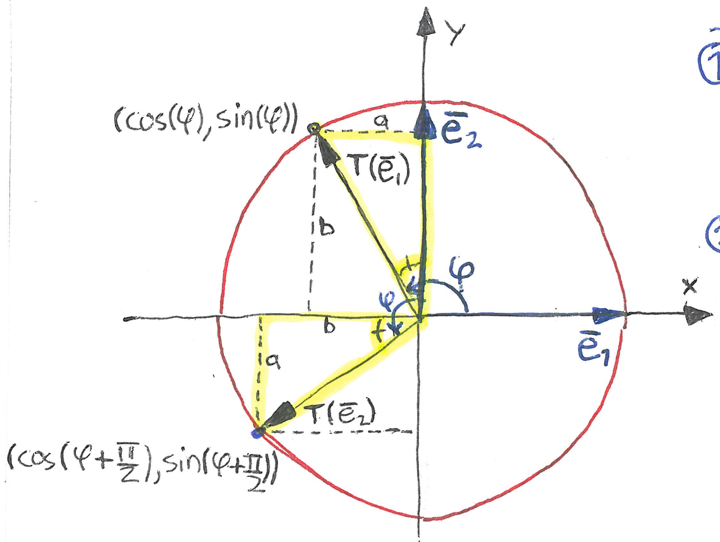
②

Ex 3 Om T är en rotation φ radianer så kan man visa geometriskt att $T(c\bar{u}+d\bar{v}) = c\,T(\bar{u}) + d\,T(\bar{v})$



Samma vektor fås genom att först rotera $\bar{u}$ och $\bar{v}$, sedan multiplicera dem med c resp. d och sedan addera dem dvs $T(c\bar{u}+d\bar{v}) = cT(\bar{u})+dT(\bar{v})$

Hur avbildas $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$?



Två sätt att räkna ut $T(\bar{e}_2)$

① $\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-(-\varphi)) = \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

$\sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}-(-\varphi)) = \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$

Gäller för alla φ!

② Likadana trianglar med sidor a, b:
(För fallet $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$. Se figur sid 72 för fallet $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.)

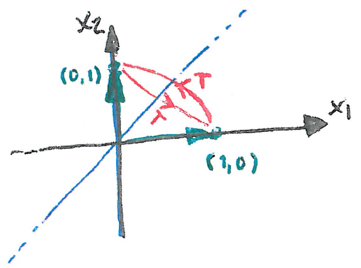
$$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\\sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix}-b\\-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

Enligt Teorem 10 är $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ med standardmatris

$$A = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Ex Reflektion i linjen $x_1 = x_2$

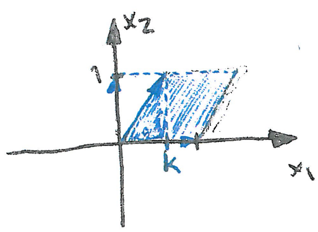


$T(\bar{e}_1) = \bar{e}_2$

$T(\bar{e}_2) = \bar{e}_1$

Standardmatris $A = (\bar{e}_2 \;\; \bar{e}_1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

Ex Skjuvning i x_1-led



$T(\bar{e}_1) = \bar{e}_1$

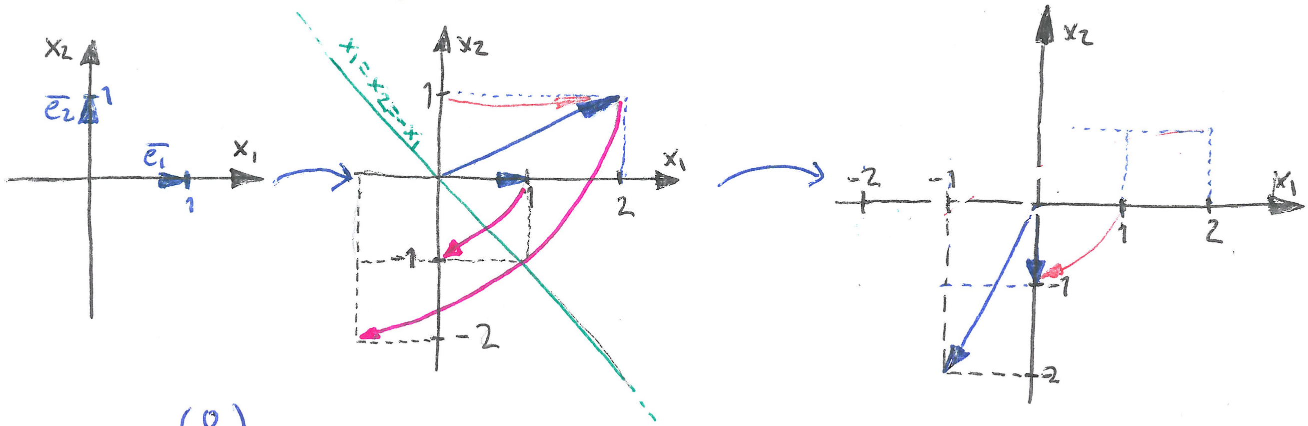
$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}$

Standardmatris: $A = \begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}$

Fler exempel: Se sid 73–75 i boken.

Uppg. 1.9.8

T: Först skjuvning $(\bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1,\ \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 + 2\bar{e}_1)$, sedan reflektion i linjen $x_2 = -x_1$



$$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

SVAR: $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ för $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Uppg. 1.9.17

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ 2x_2 + x_4 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Standardmatris: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Uppg 1.9.16

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$