

## L13-14 Avbildningsmatris

Enhetsmatrisen för  $\mathbb{R}^n$ :  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$  Eller på diagonalen, nollor i övrigt.

Ex:  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$I_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3$

Ex:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $A\bar{x} = (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{a}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 \Rightarrow A\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $A\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $A\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$A\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad A\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vi fick kolumn 1, 2 och 3 i A genom att applicera A på kolumn 1, 2 och 3 i  $I_3$ .

### Teorem 10

Om  $T$  är en linjär avbildning från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^n$  och  $I_n = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n)$  så följer att  $T(\bar{x}) = A\bar{x}$  för alla  $\bar{x}$  i  $\mathbb{R}^n$  och för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}$$

$A$  är unik (om  $T(\bar{x}) = B\bar{x}$  för alla  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  så är  $B=A$ ) och kallas avbildningens standardmatris.

### Bevis

För  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  har vi att

$$\bar{x} = I_n \bar{x} = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n) \bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n.$$

Eftersom  $T$  är linjär så följer att

$$T(\bar{x}) = T(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) = x_1 T(\bar{e}_1) + x_2 T(\bar{e}_2) + \dots + x_n T(\bar{e}_n)$$
$$T(\bar{x}) = A\bar{x}. \text{ Återstår att visa att } A \text{ är unik.}$$

Låt nu  $B$  vara en matris sådan att  $T(\bar{x}) = B\bar{x}$  för alla  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .  
Om vi skriver  $A = (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \dots \quad \bar{a}_n)$  och  $B = (\bar{b}_1 \quad \bar{b}_2 \quad \dots \quad \bar{b}_n)$  så är

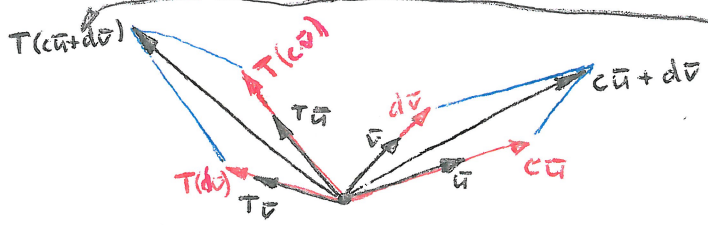
$$\bar{b}_j = B\bar{e}_j = T(\bar{e}_j) = A\bar{e}_j = \bar{a}_j.$$

Alltså är  $B=A$ .

U.S.V.

②

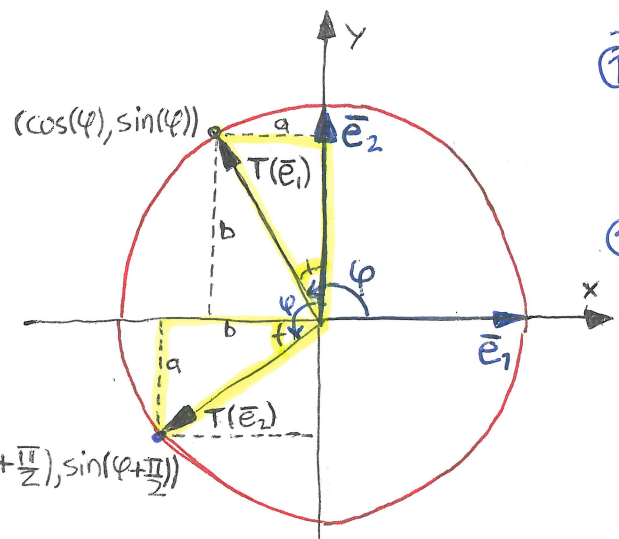
Ex 3 Om  $T$  är en rotation  $\varphi$  radianer så kan man visa geometriskt att  $T(c\bar{u} + d\bar{v}) = cT(\bar{u}) + dT(\bar{v})$



Samma vektor fås genom att först rotera  $\bar{u}$  och  $\bar{v}$ , sedan multipliceras dem med  $c$  resp.  $d$  och sedan adderas dem dvs  $T(c\bar{u} + d\bar{v}) = cT(\bar{u}) + dT(\bar{v})$

Hur avbildas  $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

Två sätt att räkna ut  $T(\bar{e}_2)$



①  $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (-\varphi)) = \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

$\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - (-\varphi)) = \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$   
Gäller för alla  $\varphi$ !

② Likadana trianglar med sidor  $a, b$ :  
(För fallet  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ , se figur sid 72 för fallet  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .)

$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

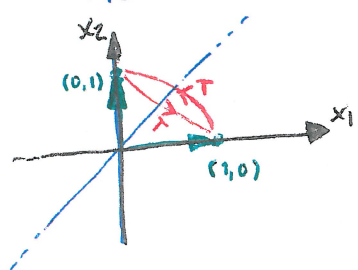
$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Enligt Teorem 10 är  $T(\bar{x}) = A\bar{x}$  med standardmatrix

$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Ex

Reflektion i linjen  $x_1 = x_2$



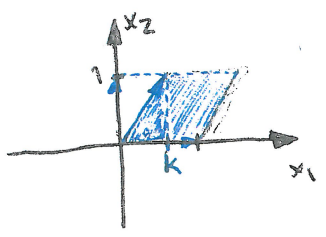
$T(\bar{e}_1) = \bar{e}_2$

$T(\bar{e}_2) = \bar{e}_1$

Standardmatrix  $A = (\bar{e}_2 \ \bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex

Skjuvning i  $x_1$ -led



$T(\bar{e}_1) = \bar{e}_1$

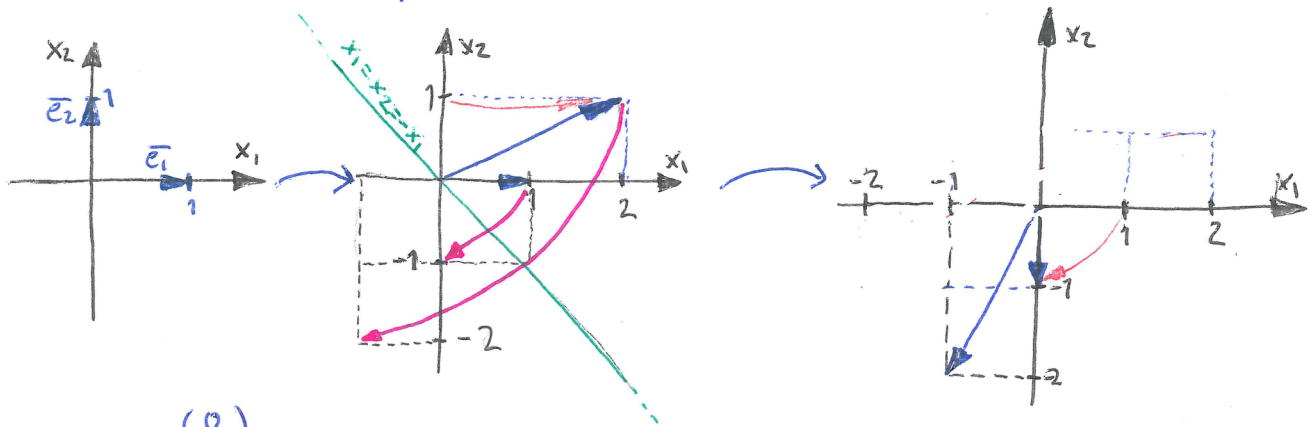
$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$

Standardmatrix:  $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fler exempel: se sid 73-75 i boken.

Uppg. 1.9.8

T: Först skjuvning ( $\bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1, \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 + 2\bar{e}_1$ ), sedan reflektion i linjen  $x_2 = -x_1$



$$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

SVAR:  $T(\bar{x}) = A\bar{x}$  för  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Uppg. 1.9.17

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ 2x_2 + x_4 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Standardmatris:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Uppg. 1.9.16

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$