

L14 Matrisräkneregler. Inversa matriser

①

Multiplikation av matris med skalär samt addition av matriser av samma storlek definieras på samma sätt som för vektorer.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Summer elementvis

rad j: $\begin{pmatrix} a_{jk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{jk} + b_{jk} \end{pmatrix}$

kolumn k

$A+C$ ej definierad, ty C och A har olika storlek.

$2A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 10 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Räkneregler: Teorem 1

r, s skalärer

A, B Matriser med samma antal rader och kolumner

$A+B = B+A$

$r(A+B) = rA + rB$

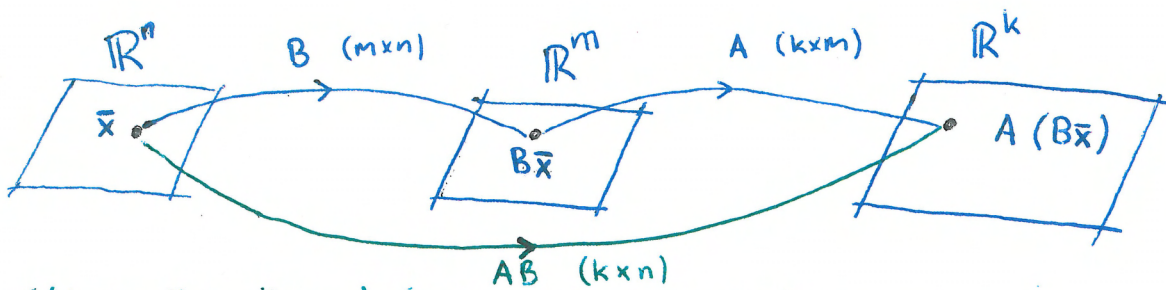
$(A+B)+C = A+(B+C)$

$(r+s)A = rA + sA$

$A+0 = A$

Nullmatris samma antal rader och kolumner som A , men bara nollor

$r(sA) = (rs)A$



Vi skulle vilja definiera multiplikation av matriserna A och B så att

$(AB)\bar{x} = A(B\bar{x})$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. (*)

$B = [\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n]$ $m \times n$ -matris

$(AB)\bar{x} = A(B\bar{x}) = A(x_1 \bar{b}_1 + \dots + x_n \bar{b}_n) = x_1(A\bar{b}_1) + \dots + x_n(A\bar{b}_n)$

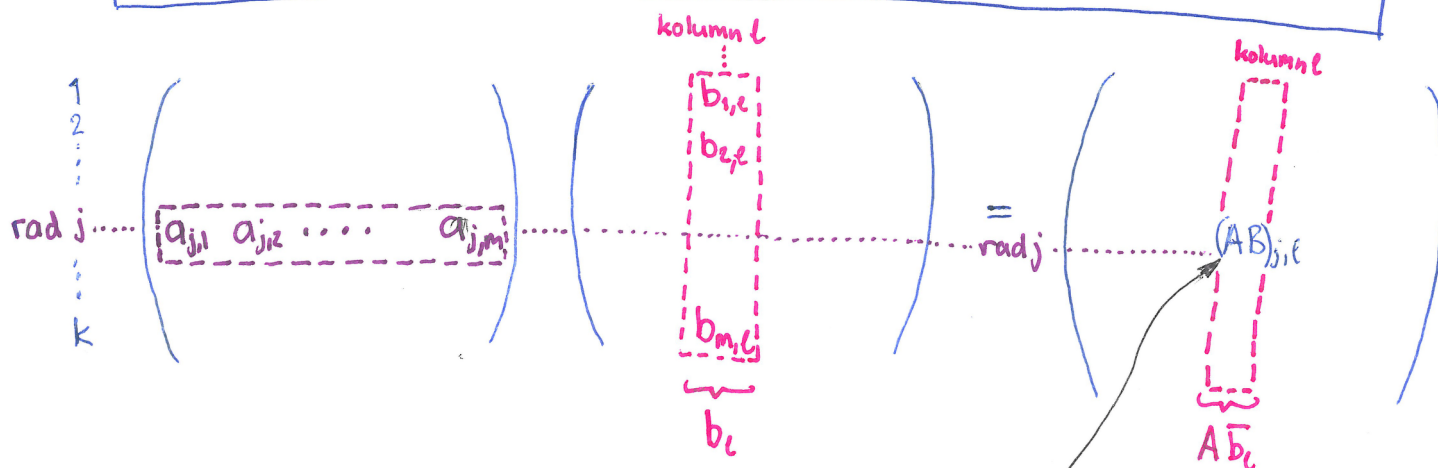
$= (A\bar{b}_1 \ A\bar{b}_2 \ \dots \ A\bar{b}_n) \bar{x}$

②

Definition

Om A är en $k \times m$ -matris och B en $m \times n$ -matris
 så är AB $k \times n$ -matrisen

$$AB = A [\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \dots \ \bar{b}_n] = [A\bar{b}_1 \ A\bar{b}_2 \ \dots \ A\bar{b}_n]$$



$$(AB)_{j,l} = (A\bar{b}_l)_j = a_{j1}b_{1l} + a_{j2}b_{2l} + \dots + a_{jm}b_{ml}$$

Ex

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 9 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 & 9 \\ 39 & 53 & 27 \end{pmatrix}$$

Teorem 2 (förutsatt matrisdimensioner gör ABC)

a) $A(BC) = (AB)C$

d) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$

b) $A(B+C) = AB+AC$

e) $I_m A = A = A I_n$

c) $(B+C)A = BA+CA$

BEVIS

b) - e) bevisas i övningsuppgifter.

För a), Låt $C = (\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \dots \ \bar{c}_p)$

Da' är $BC = (B\bar{c}_1 \ B\bar{c}_2 \ \dots \ B\bar{c}_p)$

$$A(BC) = A(B\bar{c}_1 \ B\bar{c}_2 \ \dots \ B\bar{c}_p) = (A\bar{b}_{c_1} \ A\bar{b}_{c_2} \ \dots \ A\bar{b}_{c_p})$$

$$\stackrel{(*)}{=} ((AB)\bar{c}_1 \ (AB)\bar{c}_2 \ \dots \ (AB)\bar{c}_p) = (AB)C$$

vsv.

Ex Om $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

så är $AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$
 $BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{bmatrix}$ ← Ej lika!

Gäller i allmänhet att $AB \neq BA$!

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alltså är $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I$

$AB = AI$ men $B \neq I$

Man kan inte alltid "förkorta" bort en matris A från ekvation av typ $AB=AC$!

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Man kan alltså ha $AB=0$ utan att vare sig A eller B är nollmatris!

④ För alla nollskilda reella tal r finns en "multiplikativ invers" $r^{-1} = \frac{1}{r}$ sådan att $r^{-1}r = rr^{-1} = 1$.

För en $n \times n$ -matris A säger man att A är inverterbar om det finns en $n \times n$ -matris C sådan att

$$CA = AC = I_n.$$

Man skriver då $C = A^{-1} =$ inversen till A .

En matris som inte är inverterbar kallas singulär.

Ex: om $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ så är

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså är $C = A^{-1}$

Teorem 4

Om $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $ad - bc \neq 0$ så är A inverterbar och $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Om $ad - bc = 0$ så är A inte inverterbar.

Beweis: Sista påståendet är övningsuppgift 25.

Om $ad - bc \neq 0$ så är

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & bd - bd \\ cd - cd & -bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & bd - bd \\ -ca + ac & -bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vsu.

Teorem 6 a

Om A är inverterbar matris så är A^{-1} inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$.

Beweis Följer direkt av definitionen av A att $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Om A är inverterbar så kan detta utnyttjas för ekvationslösning:

$$\begin{aligned}
 A\bar{x} &= \bar{b} \\
 \Downarrow \\
 \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n} \bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \\
 \bar{x} &= A^{-1}\bar{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= C \\
 \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n} B &= A^{-1}C \\
 B &= A^{-1}C
 \end{aligned}$$

Lay Exempel 5, Arsnitt 2.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I_n \right) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} + A =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Radoperation!}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Radbyte!}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Mult med konstant}$$

Gäller allmänt att varje radoperation kan skrivas som multiplikation från vänster med en inverterbar matris E. Man kan utnyttja detta genom att göra Gausseliminering av en matris A och samtidigt göra samma radoperationer på I_n

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(A | I_n)}_{n \times n} &\sim (E_1 A | E_1 I_n) \sim (E_2 E_1 A | E_2 E_1 I_n) \sim \dots \\
 &\sim \underbrace{(E_m E_{m-1} \dots E_1 A)}_{\text{kalla denna E}} | \underbrace{(E_m E_{m-1} \dots E_1 I_n)}_{=E}
 \end{aligned}$$

⑥

Definiera $C = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_m^{-1}$. Då är

$$CE = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_m^{-1} \underbrace{E_m E_{m-1} \dots E_2 E_1}_{= I_n} = I_n$$

$$EC = E_m E_{m-1} \dots E_2 E_1 \underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_m^{-1}}_{= I_n} = I_n$$

Alltså är E inverterbar och

$$EA = I_n$$

$$\Downarrow \\ E^{-1}EA = E^{-1}I_n \\ \Downarrow \\ \underbrace{E^{-1}EA}_{= I_n} = E^{-1}I_n$$

$$\Downarrow \\ A = E^{-1}I_n$$

$$\Downarrow \\ A^{-1} = E$$

Inverterbar
med invers E
enligt
Teorem 6.9

Kortare: Vi visar på nästa lektion att $EA = I_n \Rightarrow A$ inverterbar och $A^{-1} = E$.
Vi har alltså visat att om Gausseliminering av A
till reducerad trappstegsform ger I_n så är A inverterbar

$$\text{och } (A | I_n) \sim (I_n | A^{-1})$$

Omvänt: Om A är inverterbar så har $A\bar{x} = \bar{b}$ lösning
för varje \bar{b} i \mathbb{R}^n . Detta medför att A har
ett pivot element i varje rad och Gausseliminering
till trappstegsform måste alltså ge I_n .

Detta ger:

Teorem 7

En $n \times n$ -matris är inverterbar om och
endast om den är radekvivalent med I_n (dvs
om och endast om den kan förenklas till I_n med rad-
operationer). När så är fallet så gäller att

$$(A | I_n) \sim \dots \sim (I_n | A^{-1}).$$

Ex: Räkna ut invers till $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1)}]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(3)-(2)}]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Exempel: Är $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverterbar?

Svar Nej! Eftersom $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.