L15 Inversa matriser. Determinanter

Transponat (= kasta om rader och kolumner)

Ex: $\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Teorem 3 (avsn. 2.1)

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

c) För skalär r: $(rA)^T = rA^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$

Bevis: a) – c) enkla

d):

$$((AB)^T)_{jk} = (AB)_{k,j} = a_{k,1} b_{1,j} + a_{k,2} b_{2,j} + \dots + a_{k,n} b_{n,j}$$

$$(B^T A^T)_{jk} = \left(\begin{array}{c} j: \end{array} \begin{pmatrix} b_{1,j} & b_{2,j} & \cdots & b_{n,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \text{kol } k: \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{matrix}} \end{pmatrix} \right)_{jk} =$$

$$= a_{k,1} b_{1,j} + a_{k,2} b_{2,j} + \dots + a_{k,n} b_{n,j}$$

Teorem 6 (Avsn. 2.2) För inverterbara $n \times n$-matriser A och B

a) A^{-1} är inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$

b) AB inverterbar och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) A^T inverterbar och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bevis

a) visades förra lektionen

b) $B^{-1} A^{-1} AB = B^{-1} I_n B = B^{-1} B = I_n$

och på samma sätt: $AB\, B^{-1} A^{-1} = I_n$

c) $(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = I_n^T = I_n$

$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I_n^T = I_n$

②

Teorem 8 Avsn. 2.3 För $n \times n$-matris A är följande ekvivalenta:

a) A inverterbar

b) A är radekvivalent med I_n.

c) A har n pivotelement

d) $A\bar{x} = \bar{0}$ har bara triviala lösningen.

e) kolumnerna i A är linjärt oberoende.

f) Den linjära avbildningen $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$ är 1-1

g) Ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ har minst en lösning för varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$.

h) Kolumnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$

i) Den linjära avbildningen $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$.

j) Det finns en $n \times n$-matris C sådan att $CA = I_n$

k) Det finns en $n \times n$-matris D sådan att $AD = I_n$

l) A^T är inverterbar

Nytt!

Bevis

$(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (j) \Rightarrow (d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b)$

- Om a) är sant så är $A^{-1}A = I_n$ dvs j) är sant
- Om j) är sant så har vi $CA = I_n$. Antag att
  $A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \underbrace{CA}_{I_n}\bar{x} = C\bar{0} = \bar{0} \Leftrightarrow I_n\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
  Alltså följer att d) är sant

Detta ger a) $\Rightarrow$ j) $\Rightarrow$ d) $\Leftrightarrow$ a)

- Antag att (d) är sant. Gausselimiera $(A \mid \bar{0})$. Då måste det finnas ett pivåelement på varje rad, ty om rad k saknar pivåelement så fås fri variabel x_k och oändligt många lösningar. Alltså är c) sant.
- Om c) är sant så ger Gausselliminering till reducerad trappstegsform en etta på varje rad, som måste ligga på diagonalen ty $n \times n$-matris. Alltså b) sann.
- b) $\Rightarrow$ a) enligt Teorem 7 i avsnitt 2.2

Följer från tidigare lektioner skippas därför på denna lektion

- Att g) $\Leftrightarrow$ c) följer av Exempel 1 sid 13 i boken.

$$\begin{tikzcd} & (k) \arrow[d, Rightarrow] \\ (a) \arrow[ur, Rightarrow] & (g) \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

- Om a) sant så är $AA^{-1}=I_n$, så k) är sant.
- Om k) är sant så gäller att
  $AD=I_n \Rightarrow (AD)\bar{b} = I_n\bar{b} \Rightarrow A(D\bar{b})=\bar{b}$
  alltså följer att k) $\Rightarrow$ g) $\Leftrightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) enligt förra sidan.
- Antag nu att g) är sant, dvs för varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$ har $A\bar{x}=\bar{b}$ minst en lösning.
  Då måste det finnas ett pivåelement på varje rad (ty annars kan $\bar{b}$ väljas så att en rad blir $0=$ (någonting nollskilt)).
  Alltså n pivåelement och vi har visat ovan att det med för att A är inverterbar

Behövs ej!

$(g) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (i)$ ← har visats i tidigare avsnitt.
$(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f)$
$(a) \Leftrightarrow (l)$

v.s.v.

Från j och k fås att

$CA=I_n \Rightarrow$ A inverterbar och $C\underbrace{AA^{-1}}_{I_n} = I_nA^{-1} \Leftrightarrow C=A^{-1}$

$AD=I_n \Rightarrow$ A inverterbar och $D=A^{-1}AD=A^{-1}I_n \Leftrightarrow D=A^{-1}$

Alltså: $\boxed{A, B \ n\times n \text{ och } AB=I_n \Rightarrow A, B \text{ inverterbara och } B=A^{-1} \text{ och } A=B^{-1}}$

Ex: Är $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ inverterbar?

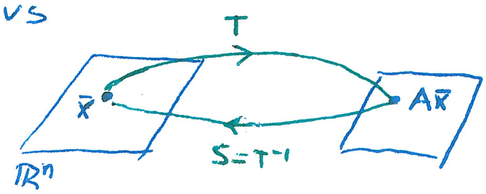
Lösning: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ sid 121 i boken

3 pivåelement $\Rightarrow$ A inverterbar.

Ex: För linjära avbildningar, om $T(\bar{x})=A\bar{x}$ och $S(\bar{y})=A^{-1}\bar{y}$ så motsvarar $A^{-1}A=AA^{-1}=I_n$ att

$A^{-1}A\bar{x}=AA^{-1}\bar{x}=I_n\bar{x}=\bar{x}$, dvs

$S(T(\bar{x}))=T(S(\bar{x}))=\bar{x}$



M0030M – Lektion 15

Komplement till Theorem 8, Avsnitt 2.3 i Lay

Niklas Grip

26 november 2018

Teorem 7 i avsnitt 2.2 visar att en $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med $n \times n$ enhetsmatrisen I . Från beviset följer även att $\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{I}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\mathrm{I} & \mathrm{A}^{-1}\end{bmatrix}$, vilket ger Gauss-Jordans algoritm för att räkna ut inversen. För att kunna räkna ut A^{-1} på det sättet så måste det först gå att göra Gausseliminering av A till trappstegsform med exakt n pivåelement, och om vi kan det så har vi sett att det går att använda pivåelementen till att eliminera alla nollskilda element ovanför ettt pivåelement. Alltså följer att

$$\mathrm{A} \sim \mathrm{I} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{A} \text{ har } n \text{ pivåelement}$$

Vi har även sett tidigare att (c) ⇔ (d) ⇔ (e) nedan .

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A.

- (a) A är inverterbar.
- (b) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$
- (c) A har n pivåelement.
- (d) Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.
- (e) A linjärt oberoende kolumner.

Från förra sidan:

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A.

- (a) A är inverterbar
- (b) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$
- (c) A har n pivåelement.
- (d) Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.
- (e) A linjärt oberoende kolumner.

En linjär avbildning $\boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ kallas *injektiv* eller *1–1* om

$$T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}.$$

Detta kan vi skriva om på den ekvivalenta formen

$$\mathrm{A}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Sätter vi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, så blir detta (d) ovan. Vi kan alltså utöka listan men ett ekvivalent villkor till på nästa sida.

Från förra sidan:

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A.

- (a) A är inverterbar
- (b) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$
- (c) A har n pivåelement.
- (d) Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.
- (e) A linjärt oberoende kolumner.
- (f) $\boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ är injektiv (1–1).

Vi har även sett tidigare att

A har n pivåelement $\Leftrightarrow$ A har ett pivåelement i varje *kolumn*

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har *exakt* en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

och

A har n pivåelement $\Leftrightarrow$ A har ett pivåelement i varje *rad*

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har *minst* en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

De två rödmarkerade egenskaperna är alltså ekvivalenta för $n \times n$-matriser och vi utökar vår lista med det skenbart svagare av dessa.

Vi har även sett tidigare att (g) kan formuleras om som villkoren (h) och (i) nedan:

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A.

(a) A är inverterbar

(b) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$

(c) A har n pivåelement.

(d) Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.

(e) A linjärt oberoende kolumner.

(f) $\boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ är injektiv (1–1).

(g) $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

(h) As kolumner spänner upp $\mathbb{R}^n$.

(i) Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på (onto) $\mathbb{R}^n$.

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A.

a. A är inverterbar
b. $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$
c. A har n pivåelement.
d. Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.
e. A linjärt oberoende kolumner.
f. $\boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ är injektiv (1–1).
g. $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.
h. As kolumner spänner upp $\mathbb{R}^n$.
i. Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på (onto) $\mathbb{R}^n$.

Antag nu att det finns en $n \times n$-matris V sådan att $\mathrm{VA} = \mathrm{I}$ (*vänsterinvers, left inverse*). Då har $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen, ty då gäller att

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathrm{VA}\boldsymbol{x} = \mathrm{V}\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathrm{I}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Alltså A inverterbar och $\mathrm{V} = \mathrm{VI} = \mathrm{V}(\mathrm{AA}^{-1}) = (\mathrm{VA})\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{IA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}$
Omvänt: Om A är inverterbar så finns vänsterinvers $V = \mathrm{A}^{-1}$.

Från förra sidan:

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A.

(a) A är inverterbar
(b) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$
(c) A har n pivåelement.
(d) Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.
(e) A linjärt oberoende kolumner.
(f) $\boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ är injektiv (1–1).
(g) $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.
(h) As kolumner spänner upp $\mathbb{R}^n$.
(i) Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på (onto) $\mathbb{R}^n$.
(j) Det finns en $n \times n$-matris V sådan att $\mathrm{VA} = \mathrm{I}$ (V = *vänsterinvers*).

Om det finns en $n \times n$-matris R sådan att $\mathrm{AR} = \mathrm{I}$ så följer det att $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösningen $\boldsymbol{x} = \mathrm{R}\boldsymbol{b}$, d v s (g) följer, A är inverterbar och
$\mathrm{R} = \mathrm{IR} = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{R} = \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AR}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{I} = \mathrm{A}^{-1}$.

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A. (Theorem 8, avsnitt 2.3.)

a. A är inverterbar
b. $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$
c. A har n pivåelement.
d. Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.
e. A linjärt oberoende kolumner.
f. $\boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ är injektiv (1–1).
g. $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.
h. As kolumner spänner upp $\mathbb{R}^n$.
i. Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på (onto) $\mathbb{R}^n$.
j. Det finns en $n \times n$-matris V sådan att $\mathrm{VA} = \mathrm{I}$ ($\mathrm{V} =$ *vänsterinvers*).
k. Det finns en $n \times n$-matris R sådan att $\mathrm{AR} = \mathrm{I}$ ($\mathrm{R} =$ *högerinvers*).
l. A^{T} är inverterbar.

Det sista villkoret följer nu direkt från en omskrivning

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Ekvivalenta egenskaper hos en $n \times n$-matris A. (Theorem 8, avsnitt 2.3.)

- (a) A är inverterbar
- (b) $\mathrm{A} \sim \mathrm{I}$
- (c) A har n pivåelement.
- (d) Ekvationen $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har enbart triviala lösningen.
- (e) A linjärt oberoende kolumner.
- (f) $\boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ är injektiv (1–1).
- (g) $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.
- (h) As kolumner spänner upp $\mathbb{R}^n$.
- (i) Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på (onto) $\mathbb{R}^n$.
- (j) Det finns en $n \times n$-matris V sådan att $\mathrm{VA} = \mathrm{I}$ ($\mathrm{V} =$ *vänsterinvers*).
- (k) Det finns en $n \times n$-matris R sådan att $\mathrm{AR} = \mathrm{I}$ ($\mathrm{R} =$ *högerinvers*).
- (l) A^{T} är inverterbar.
- (m) Determinanten $\det(\mathrm{A}) \neq 0$

Vi tar även med (m), som bevisas i Teorem 4, Avsnitt 3.2 i Lay.