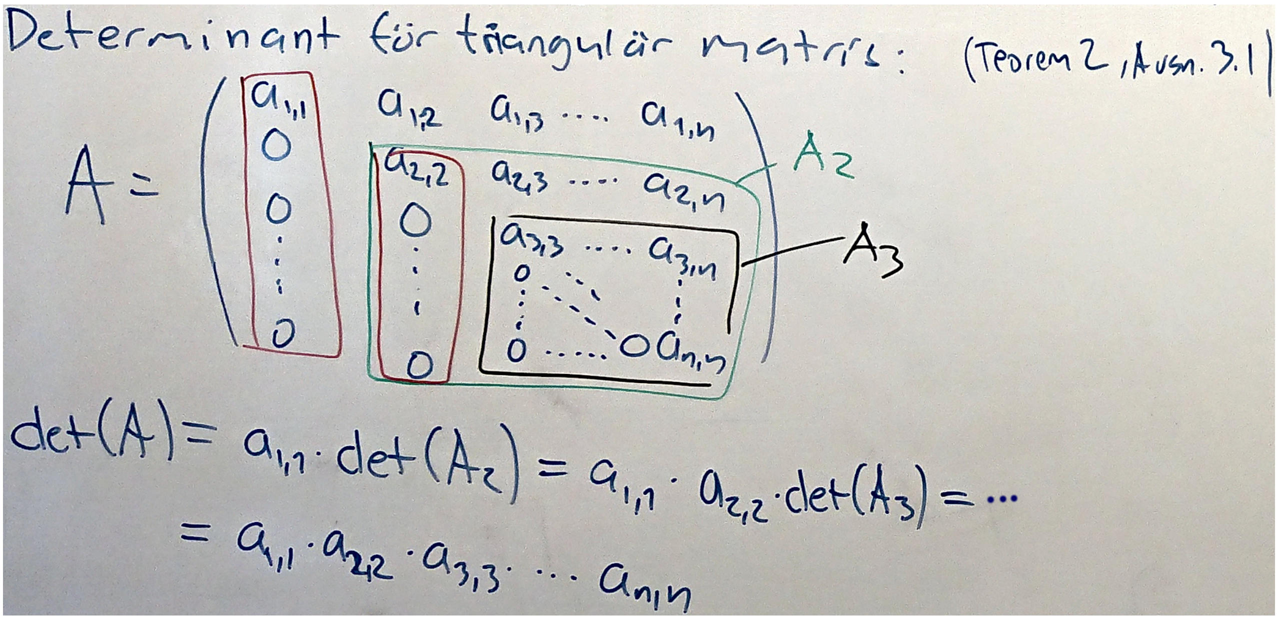
L 17-18 Beräkning av determinanter, egenskaper, Cramers regel



Determinant för triangulär matris: (Teorem 2, Avsn. 3.1)

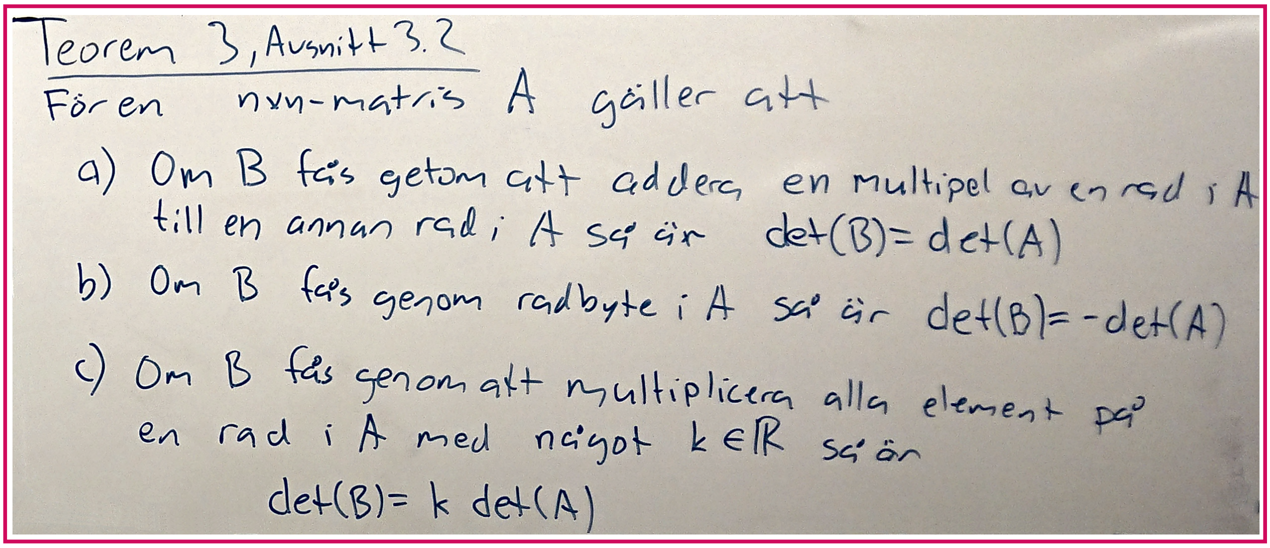
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \end{matrix} \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{2,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a_{n,n} \end{matrix}} \end{matrix} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot \det(A_2) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_3) = \cdots$$
$$= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdot \ldots a_{n,n}$$

Teorem 2 (avsnitt 3.1)

Om A är en triangulär matris (= enbart nollor under diagonalen alternativt enbart nollor över diagonalen) så är $\det(A) =$ produkten av diagonalelementen.

En viktig egenskap är hur determinanter påverkas av radoperationer: Man kan visa följande:



Teorem 3, Avsnitt 3.2

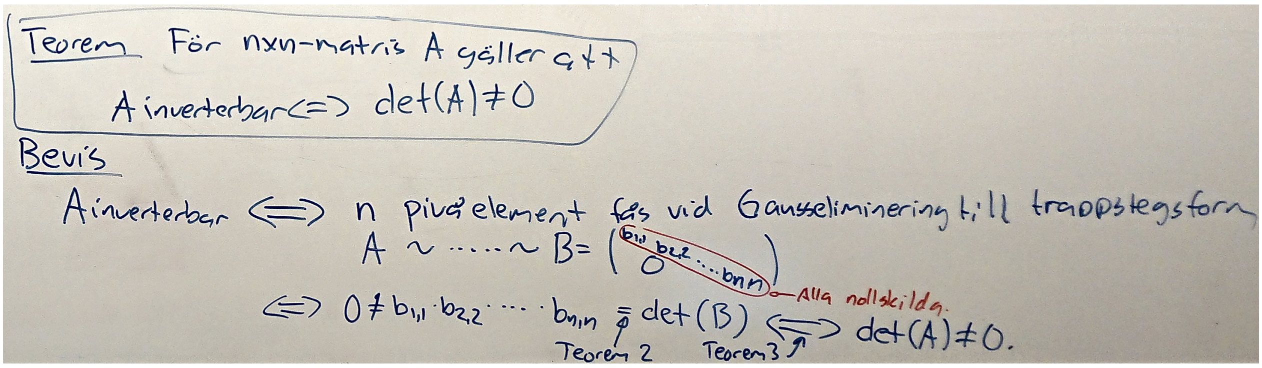
För en $n \times n$-matris A gäller att

a) Om B fås getom att addera en multipel av en rad i A till en annan rad i A så är $\det(B) = \det(A)$

b) Om B fås genom radbyte i A så är $\det(B) = -\det(A)$

c) Om B fås genom att multiplicera alla element på en rad i A med något $k \in \mathbb{R}$ så är

$$\det(B) = k \det(A)$$



Teorem För $n \times n$-matris A gäller att

$$A \text{ inverterbar} \iff \det(A) \neq 0$$

Bevis

A inverterbar $\iff$ n pivåelement fås vid Gausseliminering till trappstegsform

$$A \sim \cdots\cdots \sim B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & & & \\ & b_{2,2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

— Alla nollskilda.

$$\iff 0 \neq b_{1,1} \cdot b_{2,2} \cdot \cdots \cdot b_{n,n} \underset{\text{Teorem 2}}{=} \det(B) \underset{\text{Teorem3}}{\iff} \det(A) \neq 0.$$

Exempel 2

Faktorisera ut 2 ur rad 1

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{(3)+4\cdot(2)}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}_{(4)+(-\frac{1}{2})\cdot(3)} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot(-6)\cdot 1 = -36$$

På det här sättet kan man alltid reducera en $n\times n$-matris A till trappstegsform genom att göra radbyten och genom att addera multipel av rad till annan rad $A \sim \cdots \sim U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & u_{nn} \end{pmatrix} =$ och då är $\det(A) = u_{1,1}\, u_{2,2} \cdots u_{n,n}$, så

A inverterbar $\Longleftrightarrow$ A har n pivåelement
(som därmed måste ligga på diagonalen)

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{trianggulär efter Gaussellimmerins och med} \\ \text{alla diagonalelement nollskilda} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow 0 \neq u_{1,1}\, u_{2,2} \cdots u_{n,n} = \det(A)$

$$\boxed{A \text{ inverterbar} \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0}$$

Ex Uppg. 3.2.26 Använd determinanter för att avgöra om vektorerna är linjärt oberoende.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3\\5\\-6\\4\end{pmatrix}}_{\bar{a}_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-6\\0\\7\end{pmatrix}}_{\bar{a}_2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\0\end{pmatrix}}_{\bar{a}_3} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\end{pmatrix}}_{\bar{a}_4}$$

$\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ linjärt oberoende $\iff x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + x_4\bar{a}_4 = \bar{0}$ har bara triviala lösningen

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix}\bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4\end{pmatrix}}_{A} \bar{x} = \bar{0} \text{ ——— '' ———}$$

$\iff A$ inverterbar

$\iff \det(A) \neq 0$

$$=0$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & -6 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = a_{1,4}C_{1,4} + a_{2,4}C_{2,4} + a_{3,4}C_{3,4} + a_{4,4}C_{4,4} = -3\,A_{4,4}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3(-6 \cdot C_{3,1} + 0 \cdot C_{3,2} + 3\,C_{3,3}) = -3(-6\,A_{3,1} + 3\,A_{3,3}) =$$

$$= -3\left(-6 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}\right) = -3\left(-6 \cdot (-2 - 12) + 3 \cdot (-18 - 10)\right)$$

$$= -3(+6 \cdot 14 - 3 \cdot 28) = 0$$

SVAR Alltså ej linjärt oberoende vektorer!

4a

Teorem 5P₁: Om A är en n×n-matris så är

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Bevis: Induktion, P_n:

Basfall: $n=2$, dvs $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - cb$

$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^T) = ad - bc = \det(A)$

Antag P_n sant. (1)

För P_{n+1}, välj en $(n+1)\times(n+1)$-matris A

Utveckling längs rad 1 (med beteckningar som tidigare) ger

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1,k} \det(A_{1,k}) \qquad (2)$$

För $B = A^T$ ger utveckling längs kolumn 1 att

$$\det(A^T) = \det(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{k,1} \cdot \det(B_{k,1}) \qquad (3)$$

$B_{k,1}$ = det man får då man plockar bort rad k och kolumn 1 från $B = A^T$

= (det man får då man plockar bort rad 1 och kolumn 2 från A $)^T = (A_{1,k})^T$

Enligt (1) är $\det(B_{k,1}) = \det((A_{1,k})^T) \overset{(1)}{=} \det(A_{1,k})$

(3) ger då: $\det(A^T) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \underbrace{b_{k,1}}_{a_{1,k}} \det(A_{1,k}) \overset{(2)}{=} \det(A)$

Ex

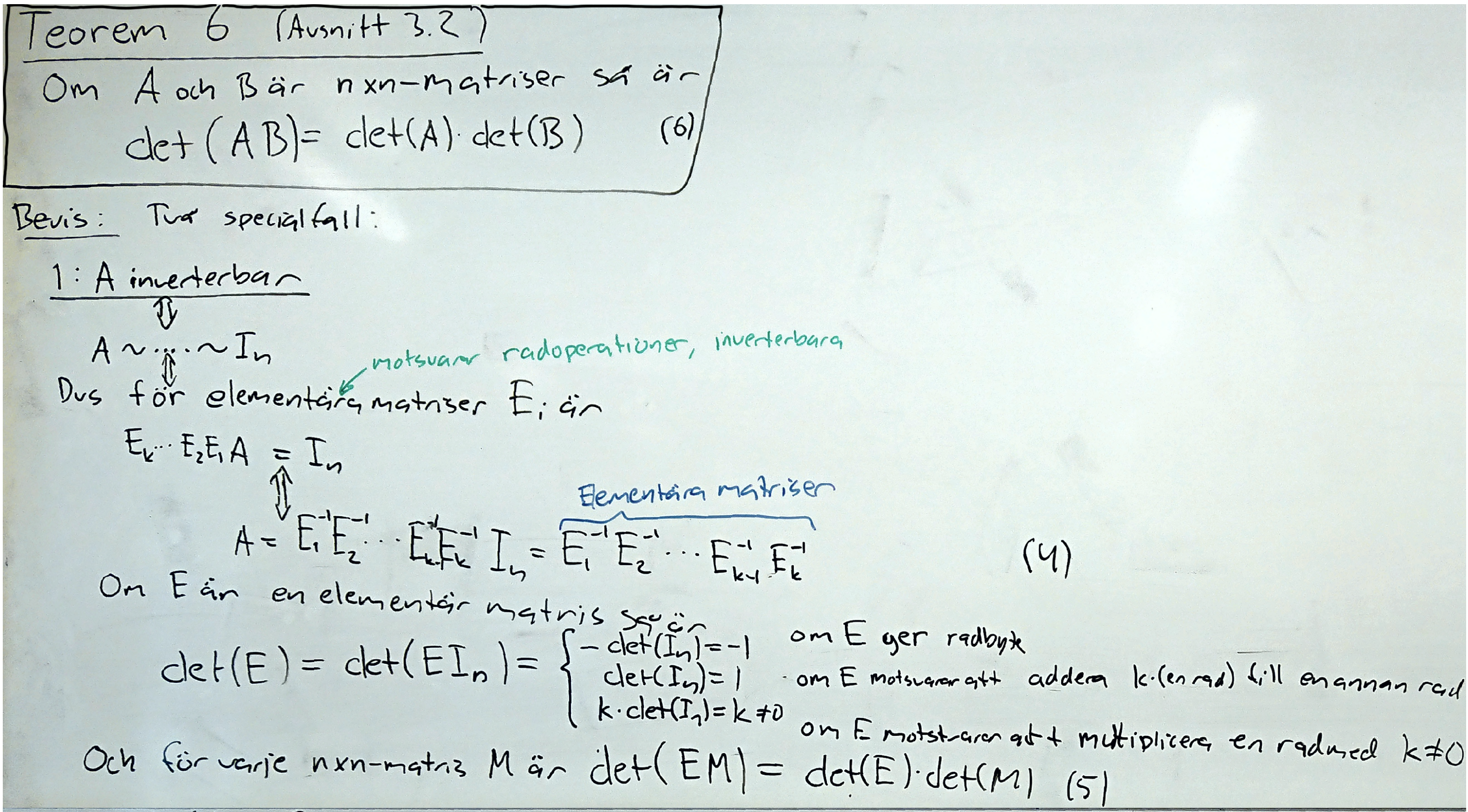
$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}}_{A} \underset{(3)+2\cdot(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ \underbrace{-5 \quad -8 \quad 0 \quad 9}_{U} \end{vmatrix} = 0$$

Man kan se det på flera sätt. Tex

En radoperation till ger nollrad, vilket ger ~~färre~~ färre än n pivåelement

det (A) = det(U) = det (U^T) = 0 eftersom två av kolumnerna är lika, vilket ger linjärt beroende kolumner så att U^T ej är inverterbar och därmed det(U^T) = 0.

4b



Teorem 6 (Avsnitt 3.2)

Om A och B är nxn-matriser så är

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \qquad (6)$$

Bevis: Två specialfall:

1: A inverterbar

$$\Updownarrow$$

$$A \sim \dots \sim I_n$$

$$\Updownarrow$$

Dvs för elementära matriser E_i är (motsvarar radoperationer, inverterbara)

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n$$

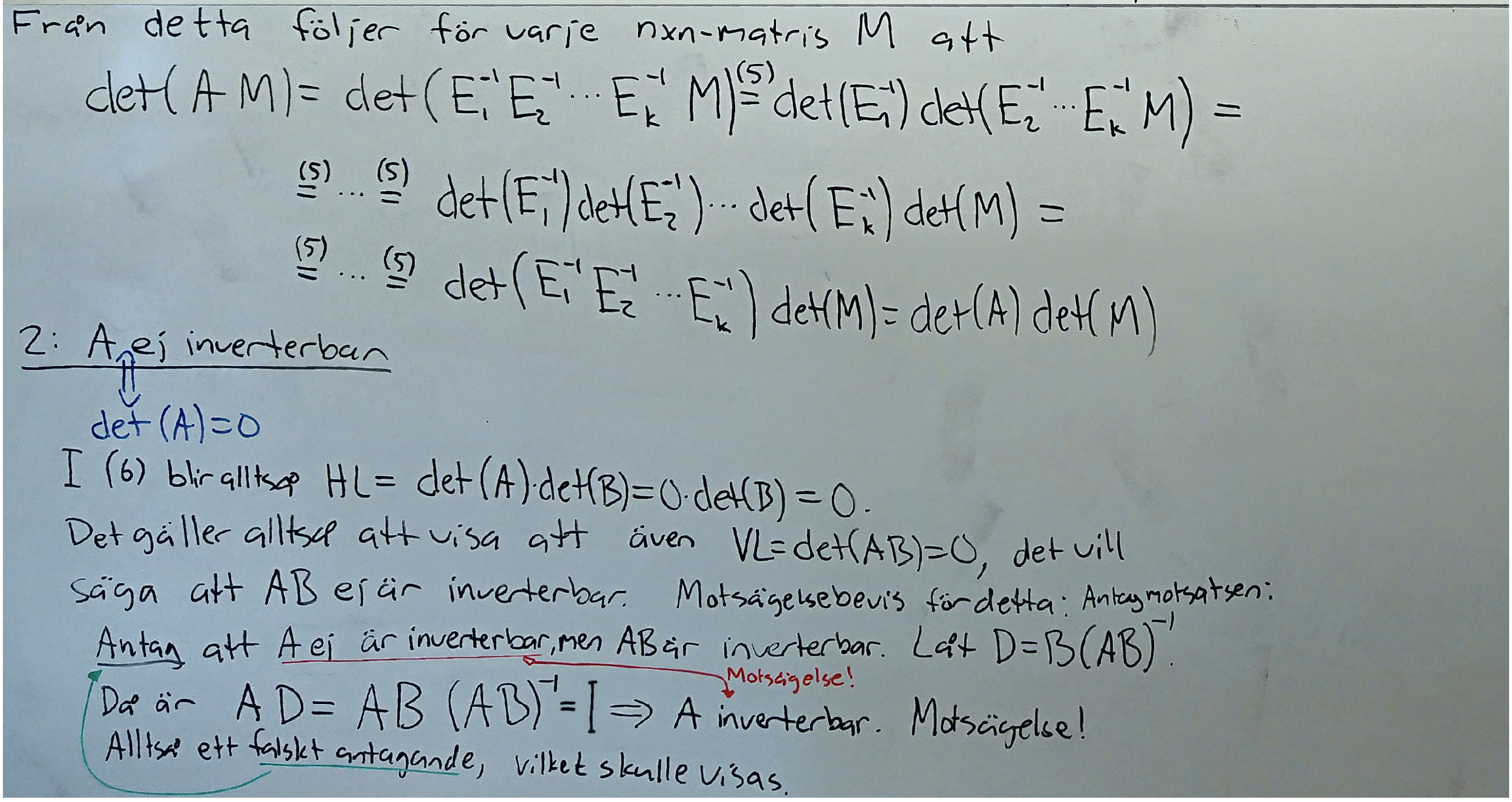
$$\Updownarrow$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} E_k^{-1} I_n = \overbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}}^{\text{Elementära matriser}} \qquad (4)$$

Om E är en elementär matris så är

$$\det(E) = \det(EI_n) = \begin{cases} -\det(I_n) = -1 & \text{om E ger radbyte} \\ \det(I_n) = 1 & \text{om E motsvarar att addera } k\cdot(\text{en rad}) \text{ till en annan rad} \\ k \cdot \det(I_n) = k \neq 0 & \text{om E motsvarar att multiplicera en rad med } k \neq 0 \end{cases}$$

Och för varje nxn-matris M är $\det(EM) = \det(E) \cdot \det(M) \quad (5)$



Från detta följer för varje nxn-matris M att

$$\det(AM) = \det(E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} M) \overset{(5)}{=} \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} M) =$$

$$\overset{(5)}{=} \cdots \overset{(5)}{=} \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1}) \cdots \det(E_k^{-1}) \det(M) =$$

$$\overset{(5)}{=} \cdots \overset{(5)}{=} \det(E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}) \det(M) = \det(A) \det(M)$$

2: A ej inverterbar

$$\Updownarrow$$

$$\det(A) = 0$$

I (6) blir alltså $HL = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \cdot \det(B) = 0$.

Det gäller alltså att visa att även $VL = \det(AB) = 0$, det vill säga att AB ej är inverterbar. Motsägelsebevis för detta: Antag motsatsen:

Antag att A ej är inverterbar, men AB är inverterbar. Låt $D = B(AB)^{-1}$.

Motsägelse!

Då är $AD = AB(AB)^{-1} = I \Rightarrow$ A inverterbar. Motsägelse!

Alltså ett falskt antagande, vilket skulle visas.

För en $n \times n$-matris $A = (\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n)$ och $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, definiera

$$A_k(\bar{x}) = (\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \; \cdots \; \bar{a}_{k-1} \; \bar{x} \; \bar{a}_{k+1} \; \cdots \; \bar{a}_n)$$

Teorem 7 Cramers regel (Avsnitt 3.3)

För varje inverterbar $n \times n$-matris A och varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^n$ så ges den unika lösningen $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ till $A\bar{x} = \bar{b}$ av

$$x_k = \frac{\det(A_k(\bar{b}))}{\det(A)}$$

Bevis

För $A = (\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \; \cdots \; \bar{a}_n)$ och $I_n = (\bar{e}_1 \; \bar{e}_2 \; \cdots \; \bar{e}_n)$

så är

$$\begin{aligned} A\, I_k(\bar{x}) &= A(\bar{e}_1 \; \cdots \; \bar{e}_{k-1} \; \bar{x} \; \bar{e}_{k+1} \; \cdots \; \bar{e}_n) \\ &= (A\bar{e}_1 \; \cdots \; A\bar{e}_{k-1} \; A\bar{x} \; A\bar{e}_{k+1} \; \cdots \; A\bar{e}_n) \\ &= (\bar{a}_1 \; \cdots \; \bar{a}_{k-1} \; \bar{b} \; \bar{a}_{k+1} \; \cdots \; \bar{a}_n) = A_k(\bar{b}) \end{aligned}$$

$$\det(A)\det(I_k(\bar{x})) = \det(A_k(\bar{b}))$$

$$\frac{\det(A_k(\bar{b}))}{\det(A)} = \det(I_k(\bar{x})) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & x_1 & & \\ & 1 & & \vdots & 0 & \\ & & \ddots\, 1 & x_{k-1} & & \\ & 0 & & x_k & & \\ & & & x_{k+1} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & x_n & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_k$$

Om $x_k = 0$ så har vi noll-rad, så matrisen är ej inverterbar och har determinant 0. Om $x_k \neq 0$, så kan vi elliminera alla x_n utom x_k med radoperationer och få determinanten $=$
$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot x_k \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = x_k$
(alternativt: utveckla determinanten längs rad k).

VSV.

Ex Uppgift 3.3.4

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = -5 \end{cases} \iff A\bar{x} = \bar{b} \text{ med } A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } \bar{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A_1(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_1(\bar{b})) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 15 = 6$$

$$A_2(\bar{b}) = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \det(A_2(\bar{b})) = \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 25 - 27 = -2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1(\bar{b}))}{\det(A)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2(\bar{b}))}{\det(A)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Kontroll:

$$\begin{cases} -5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18}{2} = 9 \\ 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

Stämmer!

Ex2 sid 178

$$\begin{cases} 3s\, x_1 - 2x_2 = 4 \\ -6x_1 + 5\, x_2 = 1 \end{cases}$$

Lösbar för vilket/vilka s?
hitta lösning med Cramers regel

Skriv på formen $A\bar{x} = b$ med $A = \begin{pmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_1(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

$$A_2(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3s^2 - 12 = 3(s^2 - 4) = 3(s-2)(s+2)$$

Unik lösning $\iff$ A inverterbar $\iff \det(A) \neq 0 \iff s \neq \pm 2$

För $s \neq \pm 2$

$$x_1 = \frac{\det A_1(\bar{b})}{\det(A)} = \frac{4s+2}{3(s-2)(s+2)}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\bar{b})}{\det(A)} = \frac{3s+24}{3(s-2)(s+2)} = \frac{s+8}{(s-2)(s+2)}$$

och $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Parametern s gör det svårare att lösa Exempel 2 med Gausseliminering än om den utökade matrisen ej innehållit några parametrar. Se sidan 10.

Cramers regel ger en explicit formel för elementen i A^{-1} för en inverterbar matris A. Låt

$$A^{-1} = (\bar{x}_1 \ \cdots \ \bar{x}_n).$$

Då är

$$(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n) = I_n = A\,A^{-1} = A(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) = (A\bar{x}_1 \ \cdots \ A\bar{x}_n)$$

Alltså är kolumn k i A^{-1} lösningen till $A\bar{x}_k = \bar{e}_k$

Elementet på rad r och kolumn k i A^{-1} fås alltså från Cramers regel:

$$(A^{-1})_{r,k} = \frac{\det(A_r(\bar{e}_k))}{\det(A)} \qquad (*)$$

observera även att

$$\det(A_r(\bar{e}_k)) = \det((\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{r-1} \ \bar{e}_k \ \bar{a}_{r+1} \cdots \bar{a}_n)),$$

där utveckling längs kolumn r ger exakt en nollskild term:

$$\det(A_r(\bar{e}_k)) = (-1)^{k+r}\det(A_{k,r}) = C_{k,r},$$

dvs $$(A^{-1})_{r,k} = \frac{(-1)^{k+r}\det(A_{k,r})}{\det(A)} = \frac{C_{k,r}}{\det(A)}$$

Detta ger

Teorem 8

För en $n\times n$-matris A är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$$

för den adjungerade matrisen (adjoint matrix)

$$\mathrm{Adj}\,A = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & \cdots & C_{n,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & \cdots & C_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & C_{2,n} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix}$$

⑧ Ex: Uppgift 3.3.15

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

Tecken för $C_{i,k}$: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{1,2} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $A_{1,3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

$C_{1,1} = 2$ $\quad C_{1,2} = +2$ $\quad C_{1,3} = -1$

$A_{2,1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $A_{2,2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$, $A_{2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

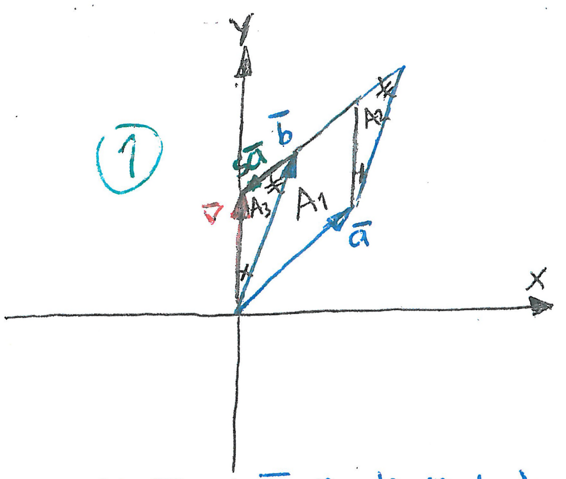
$C_{2,1} = -0$ $\quad C_{2,2} = 6$ $\quad C_{2,3} = -9$

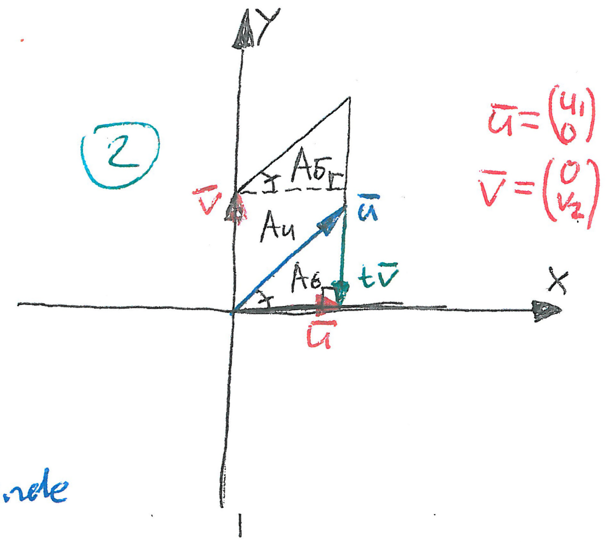
$A_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{3,2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{3,3} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$C_{3,1} = 0$ $\quad C_{3,2} = -0$ $\quad C_{3,3} = 3$

$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ SVAR: $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{pmatrix}$

|Determinanten| = area av parallellogram alternativt volym av parallellepiped





Antag att $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är linjärt oberoende

$A =$ Parallellogrammets area $= A_1 + A_2 = A_1 + A_3 = A_4 + A_5 = A_4 + A_6 = u_1 v_2$

$M = (\bar{a} \;\; \bar{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Enligt avsnitt 10.3 i Adams:
$A = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = |\det(M)|$

$\det(M) = \det(M^T) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overset{①}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \underbrace{b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2}_{= v_2} \end{vmatrix} \overset{②}{=}$

$= \begin{vmatrix} \overset{= u_1}{\overbrace{a_1}} & 0 \\ 0 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 = A$

Jag antog här att $a_1 \neq 0$, men om så ej varit fallet hade det kunnat fixas med radbyte, vilket byter tecken på determinanten.

Behövs ej. Redan gjort i Adams.

Från detta följer (med liknande resonemang för 3x3):

Teorem 9

Om A är en 2×2-matris så är $|\det(A)|$ = arean för parallellogrammet som ges av kolumnerna i A.

Om A är en 3×3-matris så är $|\det(A)| =$ = volymen för parallellepipeden som ges av kolumnerna i A.

Om P är parallellogrammet som ges av $\bar{a}_1$ och $\bar{a}_2$ och om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ då kan P skrivas som mängden

$$P = \{ s_1\bar{a}_1 + s_2\bar{a}_2 ; 0 \leq s_1 \leq 1 , 0 \leq s_2 \leq 1 \}$$

T avbildar dessa vektorer på

$$T(s_1\bar{a}_1 + s_2\bar{a}_2) = s_1 T(\bar{a}_1) + s_2 T(\bar{a}_2).$$

Om T har standardmatris M så är alltså

$$T(s_1\bar{a}_1 + s_2\bar{a}_2) = s_1 M\bar{a}_1 + s_2 M\bar{a}_2 \quad , \quad 0 \leq s_n \leq 1$$

Detta är också ett parallellogram, med två sidor givna av $M\bar{a}_1$ och $M\bar{a}_2$, och med arean

$$\det([M\bar{a}_1 \ M\bar{a}_2]) = \det(M \cdot \underbrace{[\bar{a}_1 \ \bar{a}_2]}_{A}) = \det(M)\det(A)$$

$$= \det(M) \cdot \text{Arean för } P.$$

Följer ur avsnitt 10.3 i Adams: För $A = (\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ så är

$$\det(A) = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

och parallellepipeden med sidor givna av $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ har volym

$$V = |\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})| = \left| \bar{c} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \bar{c} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right| = |\det(A)|$$

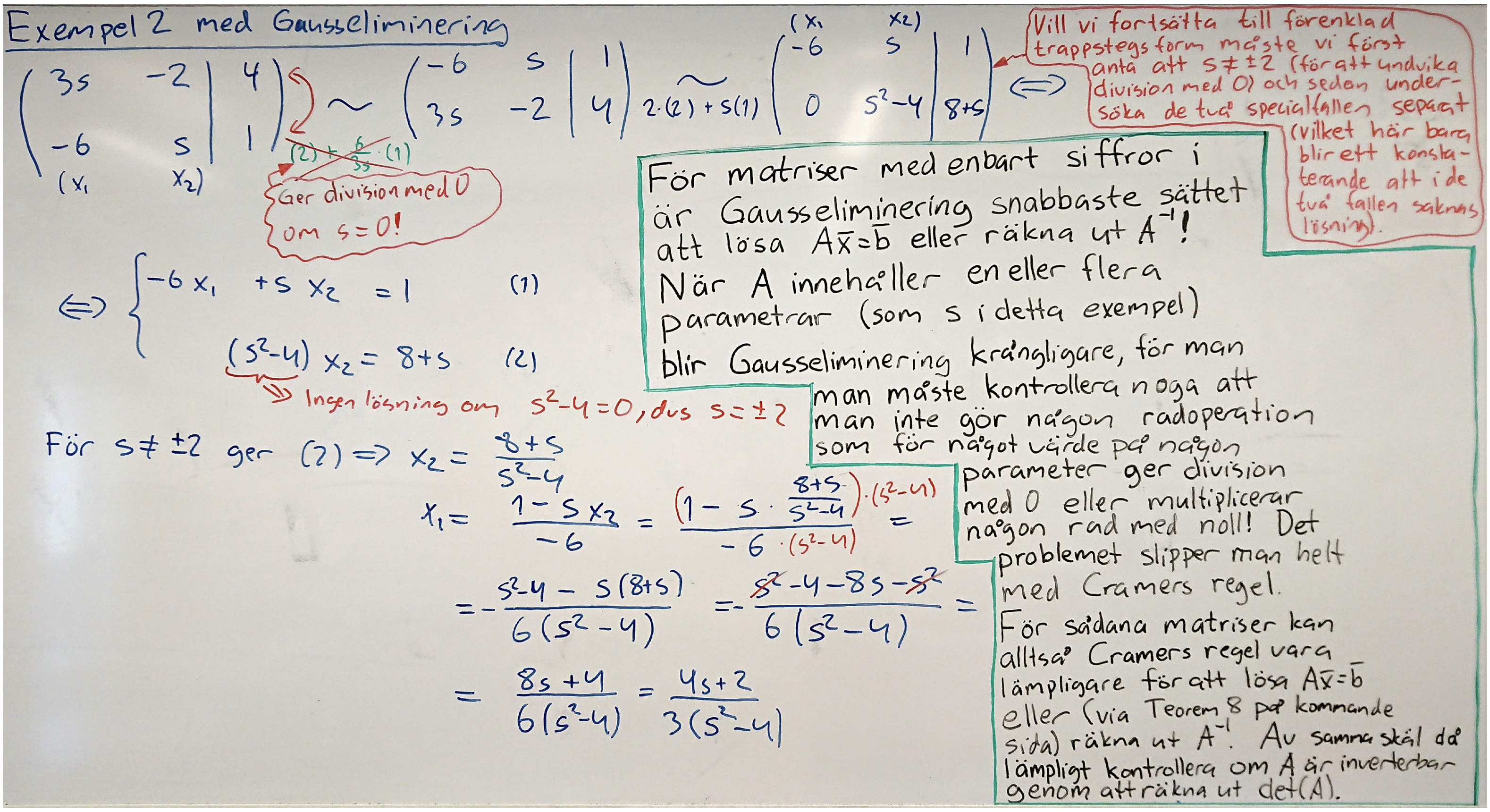
$$\begin{matrix} a_1 & \times & b_1 \\ a_2 & \times & b_2 \end{matrix}$$

Från detta och liknande resonemang för $\mathbb{R}^3$ fås

Teorem 10

För en linjär avbildning T med $\overset{3\times 3}{2\times 2}$ standardmatris M gäller att varje $\overset{\text{parallellepiped}}{\text{parallellogram}}$ P avbildas på $\overset{\text{en}}{\text{ett}}$ $\overset{\text{parallellepiped}}{\text{parallellogram}}$ med area

$$\text{area av } T(P) = |\det(M)| \cdot \text{arean av } P$$



Exempel 2 med Gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3s & -2 & 4 \\ -6 & s & 1 \\ (x_1 & x_2) & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & s & 1 \\ 3s & -2 & 4 \end{array}\right) \underset{2\cdot(2)+s(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} (x_1 & x_2) & \\ -6 & s & 1 \\ 0 & s^2-4 & 8+s \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$\cancel{(2)+\frac{6}{3s}\cdot(1)}$

Ger division med 0 om $s=0$!

Vill vi fortsätta till förenklad trappstegsform måste vi först anta att $s \neq \pm 2$ (för att undvika division med 0) och sedan undersöka de två specialfallen separat (vilket här bara blir ett konstaterande att i de två fallen saknas lösning).

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -6x_1 + s\,x_2 = 1 & (1) \\ (s^2-4)\,x_2 = 8+s & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ingen lösning om $s^2-4=0$, dvs $s=\pm 2$

För $s \neq \pm 2$ ger $(2) \Rightarrow x_2 = \frac{8+s}{s^2-4}$

$$x_1 = \frac{1-s\,x_2}{-6} = \frac{\left(1-s\cdot\frac{8+s}{s^2-4}\right)\cdot(s^2-4)}{-6\cdot(s^2-4)} =$$

$$= -\frac{s^2-4-s(8+s)}{6(s^2-4)} = -\frac{\cancel{s^2}-4-8s-\cancel{s^2}}{6(s^2-4)} =$$

$$= \frac{8s+4}{6(s^2-4)} = \frac{4s+2}{3(s^2-4)}$$

För matriser med enbart siffror i är Gausseliminering snabbaste sättet att lösa $A\bar{x}=\bar{b}$ eller räkna ut A^{-1}! När A innehåller en eller flera parametrar (som s i detta exempel) blir Gausseliminering krångligare, för man måste kontrollera noga att man inte gör någon radoperation som för något värde på någon parameter ger division med 0 eller multiplicerar någon rad med noll! Det problemet slipper man helt med Cramers regel.

För sådana matriser kan alltså Cramers regel vara lämpligare för att lösa $A\bar{x}=\bar{b}$ eller (via Teorem 8 på kommande sida) räkna ut A^{-1}. Av samma skäl då lämpligt kontrollera om A är inverterbar genom att räkna ut $\det(A)$.