L 20-21 Summatecken, areaberäkning och integraler (Adams 5.1-5.3)

Välbekant från förra läsperioden: Summatecken.

Ex: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sum_{n=1}^{5}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+5+6+7=\sum_{n=1}^{7} n = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n-1}{r-1}, \quad r\neq 1$$

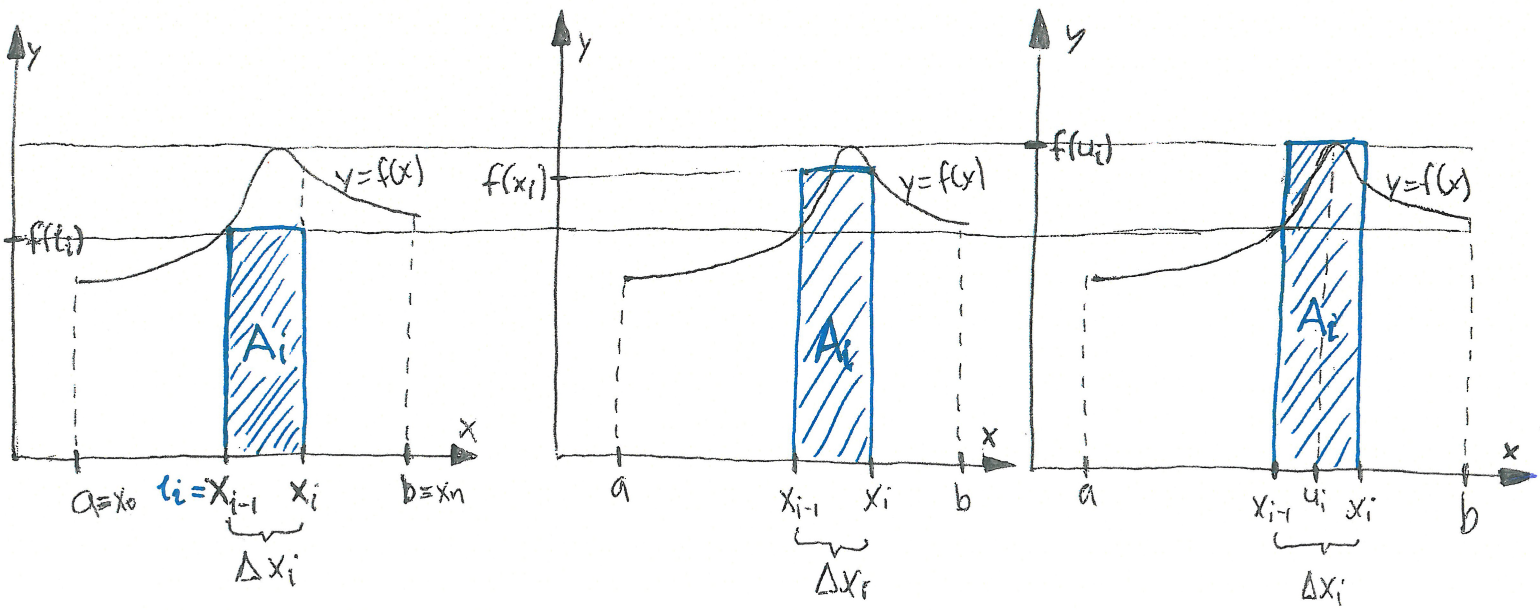
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} = \sum_{k=0}^{n} (2^3)^k = \sum_{k=0}^{n} 8^k = \frac{8^{n+1}-1}{8-1} = \frac{8^{n+1}-1}{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ (Bevisas i uppgift 5.1.37)

Areaberäkning

Dela in intervall $[a,b]$ med punkter $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$.

Tre sätt att approximera arean A mellan $y=f(x)$ och x-axeln i det intervallet:



$L_n=\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$ $\qquad$ $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ $\qquad$ $U_n=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$

Undersumma $\leq A$ $\qquad$ $L_n \leq S_n \leq U_n$ $\qquad$ Översumma $\geq A$

Större n $\Rightarrow$ fler punkter och mindre Δx_i $\Rightarrow$ mindre skillnad mellan summa och A

Ex

Tolka S_n som en Riemannsumma av rektangelareor:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{8}{n}}_{\Delta x_i} \underbrace{\left(1-\frac{8i}{n}\right)}_{f(x_i)}$$

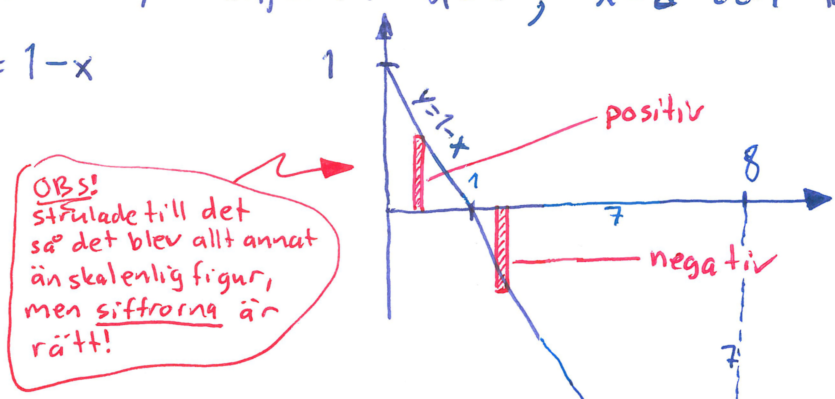
Räkna ut arean $A = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Om vi sätter $x_i = \frac{8}{n} i$

så har vi punkter i ett intervall mellan $a = x_0 = 0$ och $b = \frac{8}{n}\cdot n = 8$ och har $f(x_i) = 1 - x_i$.

När $f(x_i)$ är negativ så får man antingen tolka $f(x_i)\Delta x_i$ som "minus rektangelarean" eller så får man tolka $f(x_i)\Delta x_i$ som en "negativ area" (som i Figur 5.11 i boken).

Låter vi $n\to\infty$ så borde vi alltså få arean mellan x-axeln, linjerna $x=0$, $x=8$ och kurvan $y = f(x) = 1-x$



Alla rektanglar till vänster om $x=4$ har positiv höjd och area.
Alla rektanglar till höger om $x=4$ har negativ höjd och area.
Då $n\to\infty$ får man arean $\frac{1\cdot 1}{2}$ för den vänstra triangeln och $-\frac{7\cdot 7}{2} = -\frac{49}{2}$ för den högra. Totala arean blir då $\frac{1}{2} - \frac{49}{2} = -\frac{48}{2} = \underline{\underline{-24}}$

Åter till figuren på sid ①. Summorna där kallas övre Riemann-summa (U_n), undre Riemannsumma (L_n) och generell Riemann-summa (S_n).

Om $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n = I$ så säger man att f är integrerbar på $[a,b]$ och kallar I fs bestämda integral på $[a,b]$. Denna betecknas med symbolen

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

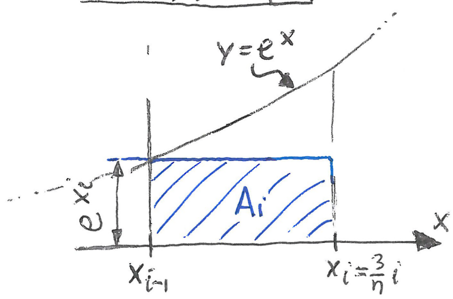
Uppgift 5.3.10

Räkna ut U_n, L_n och gränsvärdena då $n\to\infty$ för $f(x)=e^x$ på intervallet $[0,3]$ indelat i n intervall med längd $\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$.

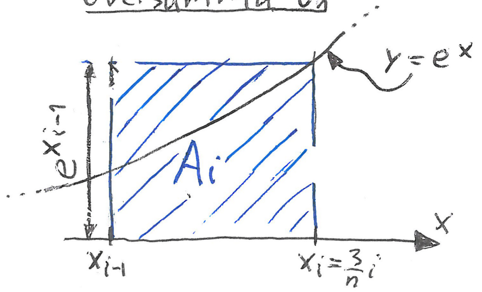
Vi har alltså punkterna

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{3}{n},\quad x_2=\frac{6}{n},\; x_3=\frac{9}{n},\quad \ldots,\; x_n=\frac{3n}{n}=3,\qquad \Delta x_i=\frac{3}{n}$$

Undersumma L_n



Översumma U_n



$$U_n=\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3}{n}i}\frac{3}{n}=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{3}{n}}\right)^i=[j=i-1]=\frac{3}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{3/n}\right)^{j+1}=\frac{3}{n}e^{3/n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{3/n}\right)^j$$

jämför

$$L_n=\sum_{i=1}^{n} e^{x_{i-1}}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3}{n}(i-1)}\frac{3}{n}=[j=i-1]=\frac{3}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{3/n}\right)^j=\frac{3}{n}\cdot\frac{\left(e^{3/n}\right)^n-1}{e^{3/n}-1}=\frac{3(e^3-1)}{n(e^{3/n}-1)}\quad(1)$$

Vi har alltså $\quad L_n = e^{3/n}U_n\quad$ så att

$$\lim_{n\to\infty} L_n=\lim_{n\to\infty}\underbrace{e^{\overset{\to 0}{3/n}}}_{\to 1}U_n=\lim_{n\to\infty}U_n$$

så att $f(x)=e^x$ är integrerbar på $[0,3]$ och $\int_0^3 e^x\,dx=\lim_{n\to\infty}U_n$ (2)

(4) Gränsvärdet är lite knepigt att räkna ut, men man kan använda derivatans definition på nämnaren i (1): Då $n \to \infty$ så får vi att

$$n\cdot(e^{3/n}-1) = \frac{e^{3/n}-1}{\frac{1}{n}} = 3\cdot\frac{e^{3/n}-1}{\frac{3}{n}} = 3\,\frac{f(0+\frac{3}{n})-f(0)}{\frac{3}{n}} \to 3f'(0)=3e^0=3$$

Insättning i (1) och (2) ger att

$$\int_0^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{3(e^3-1)}{n\cdot(e^{3/n}-1)} = \frac{3(e^3-1)}{3} = e^3-1$$

SVAR: $\int_0^3 e^x\,dx = e^3-1$

Teorem 2 (Avsnitt 5.3)

Om f är en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$.

För kontinuerliga funktioner behöver man därför inte räkna ut både U_n och L_n och kolla om de har samma gränsvärde, utan det räcker att räkna ut en av dem, alternativt S_n (med beteckningar som på sid (1)).

Uppg 5.3.12 Skriv om som integral:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$$

sätter vi $x_i = \frac{1}{n}i$ och $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ så får vi $x_0=0$, $x_n=\frac{1}{n}\cdot n=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\sqrt{x_{i-1}}}_{=L_n} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$

(Eftersom $f(x)=\sqrt{x}$ är kontinuerlig så vet vi att $L_n \to \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ då $n\to\infty$.)

Uppg 5.3.14

Skriv om som integral: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1+\frac{2i}{n}\right)$

För $x_i = \frac{2}{n} i$, $x_0 = 0$, $x_n = 2$ och den kontinuerliga

funktionen $f(x) = \ln(1+x)$ på $[0,2]$ får vi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1+\frac{2i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \ln(1+x_i)}_{=U_n} \overset{\text{Theorem 2}}{=} \int_0^2 \ln(1+x)\,dx$$