

L 22 Egenskaper, medelvärde

(Avsnitt 5.4) ①

Om man i definitionen av bestämd integral $\int_a^b f(x) dx$ sätter in $a=b$ (rektanglar med bredd=0), bsa (negativt Δx ;) så får man de första två av följande räkneregler:

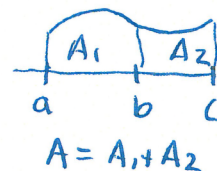
a) $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

c) $\int_a^b (A f(x) + B g(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$

(dvs $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ är en linjär avbildning)

d) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$



e) Om $a \leq b$ och $f(x) \leq g(x)$ där $a \leq x \leq b$ så gäller att

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

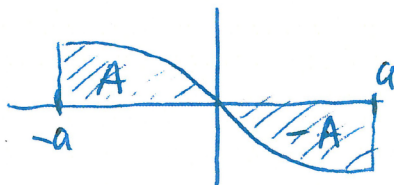


Större areamellan övre kurvan och x-axeln

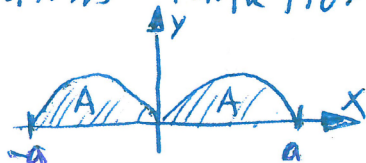
f) Triangelolikheten för summor ger motsvarande för integraler:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

g) För udda funktion f : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



h) För jäms funktion f : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$



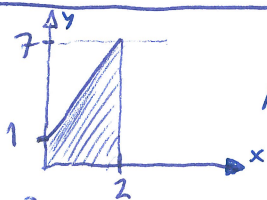
Teorem 3

② Uppg 5.4.2 Förenkla

$$\begin{aligned} & \int_0^2 3f(x) dx + \int_1^3 3f(x) dx - \int_0^3 2f(x) dx - \int_1^2 3f(x) dx = \\ & = \int_0^1 3f(x) dx + \int_1^2 3f(x) dx + \int_1^2 3f(x) dx + \int_2^3 3f(x) dx - \int_0^1 2f(x) dx - \int_1^2 2f(x) dx - \int_2^3 2f(x) dx - \int_1^2 3f(x) dx \\ & = \int_0^1 (3-2)f(x) dx + \int_1^2 (3+3-2-3)f(x) dx + \int_2^3 (3-2)f(x) dx = \\ & = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx \end{aligned}$$

Vissa integraler kan räknas ut genom areaförklaring:

Uppg 5.4.4



Area av parallelltrapets

$$\int_0^2 (3x+1) dx = 2 \cdot \frac{1+7}{2} = 2 \cdot \frac{8}{2} = 8$$

... omni kan den sedan tidigare!

Använd denna formel eller skriv som summa av triangel- och rektangelarea.

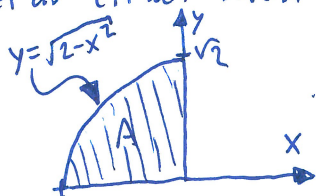
5.4.8 $\int_{-\sqrt{2}}^0 \sqrt{2-x^2} dx = ?$

Funktionskurvan $y = \sqrt{2-x^2}$ kan skrivas om som

$$y^2 = 2-x^2, \quad y \geq 0$$

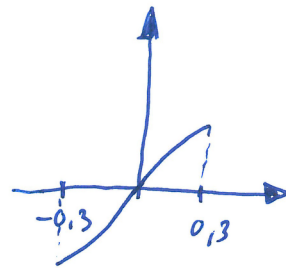
$$x^2 + y^2 = 2, \quad y \geq 0$$

Det är cirkel med centrum i (0,0) och radie $\sqrt{2}$.



$$\int_{-\sqrt{2}}^0 \sqrt{2-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \sqrt{2}^2 = \frac{\pi}{2}$$

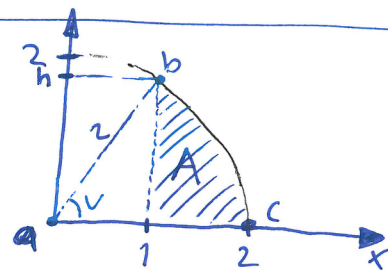
Ex: $\int_{-0,3}^{0,3} \sin(x) dx = 0$ Udda funktion!



(3)

5.4.16

$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ är arean A i figuren:



$\cos(v) = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{\pi}{3}$

cirkelsektorn abc i figuren har area $\frac{\pi/3}{2\pi} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{3}$

Från detta subtraherar vi bort triangelarean $\frac{1 \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{4-1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 Detta ger

$A = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Medelvärdessatsen för integraler

för en kontinuerlig funktion $f(x)$ på a' $[a, b]$

finns η i a' $[a, b]$ så att

$f(\eta) = m \leq f(x) \leq M = f(\eta)$ för alla $x \in [a, b]$

Alltså är

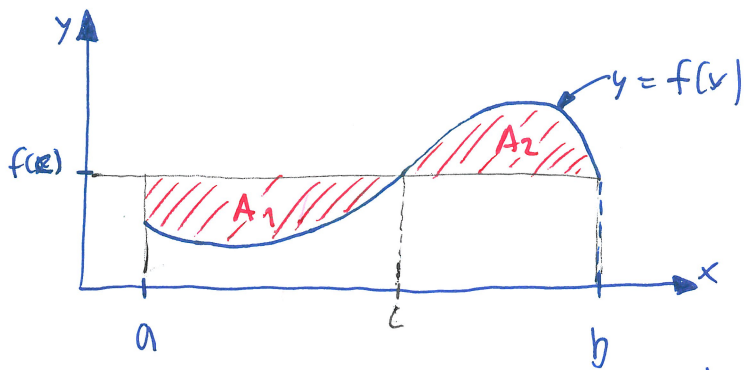
$f(\eta)(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = (b-a)M = (b-a)f(\eta)$
↑ rektangel areor ↑

$f(\eta) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(\eta)$

Enligt satsen om mellanliggande värde (f kontinuerlig) så finns något c mellan η och η sådant att

$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ (*)

4



Att rektangelarean $f(c) \cdot (b-a) \stackrel{(*)}{=} \int_a^b f(x) dx$ innebär att $A_1 = A_2$ i figuren, så i den meningen är $f(c)$ ett medelvärde av $f(x)$ på $[a, b]$

Definition 4

För en kontinuerlig funktion f på $[a, b]$ säger vi att f har medelvärdet $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

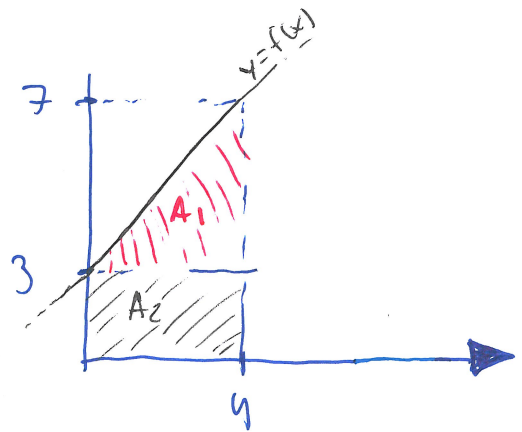
Ex: Vad är medelvärdet av $f(x) = x + 3$ på $[0, 4]$?

$$A_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$A_2 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\bar{f} = \frac{1}{4-0} \int_0^4 f(x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} (A_1 + A_2) = \frac{20}{4} = 5$$



Styckvis kontinuerlig funktion

Definition

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och på $[b, c]$ så definieras integralen

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

samt motsvarande för fler än två intervall

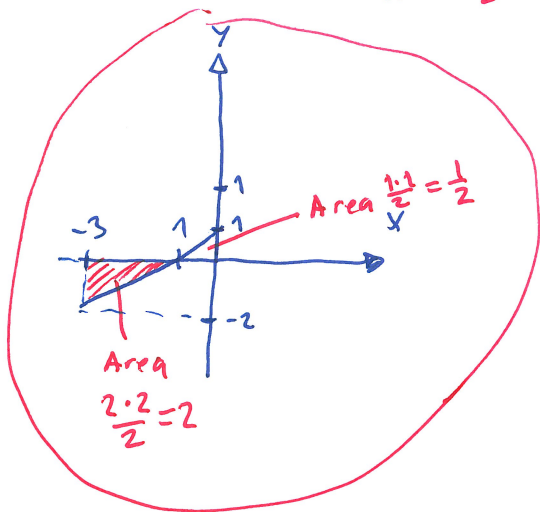
5.4. 34

5

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{då } x < 0 \\ 2 & \text{då } x > 0 \end{cases}$$

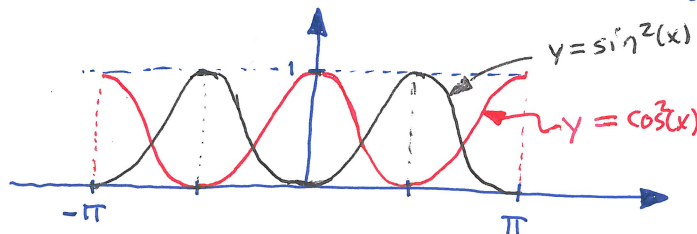
$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 f(x) dx &= \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-3}^0 (1+x) dx + \int_0^2 2 dx = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Area $\frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{3}{2}$
= rektangelarea $2 \cdot 2 = 4$



Litet bonusknep som ej finns i boken. Dvs inget ni måste kunna.

Vi kommer att lära oss knep på lektion 23 för att räkna ut $\int \sin^2(x) dx$ och $\int \cos^2(x) dx$, men för integrering av ett helt antal perioder kan vi redan nu utnyttja att $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$, så att $\cos^2(x) = \sin^2(x - \frac{\pi}{2})$ = "sin(x) translaterad $\frac{\pi}{2}$ radianer åt höger"



Integrerar man över ett helt antal perioder så blir det alltså samma. Till exempel

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx, \\ \text{så att } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx \right) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(\sin^2(x) + \cos^2(x))}_{=1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = \pi \end{aligned}$$

= rektangel area