Some elementary integrals

1. $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$

2. $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

3. $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$

specialfall av 7

7. $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \neq -1)$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

a=1

9. $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

10. $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

11. $\displaystyle\int \cancel{\sec^2 ax}\ \frac{1}{\cos^2(ax)}\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

12. $\displaystyle\int \cancel{\csc^2 ax}\ \frac{1}{\sin^2(ax)}\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

a=1

13. $\displaystyle\int \sec ax\,\tan ax\,dx = \frac{1}{a}\sec ax + C$

14. $\displaystyle\int \csc ax\cot ax\,dx = -\frac{1}{a}\csc ax + C$

a=1

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$

17. $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

18. $\displaystyle\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a\ln b}b^{ax} + C$

19. $\displaystyle\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C$

20. $\displaystyle\int \sinh ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

Teorem 5, Analysens huvudsats

Låt f vara kontinuerlig funktion på ett intervall som innehåller a,

1) Funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ är deriverbar och

$$F'(x) = f(x)$$ dvs F primitiv funktion till f.

2) För varje primitiv funktion $G(x)$ till $f(x)$ (dvs $G'(x) = f(x)$) så följer att

standard notation

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = \Big[G(x)\Big]_a^b$$

Exempel först, sedan bevis.

Alla primitiva funktioner vi behöver kunna (jämför sid 318 i boken)

1. $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$
3. $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
4. $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
5. $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + C$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}(x) + C$
8. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x) + C$
9. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5.5.5 $\int_{-1}^{2} 3x^2 - 4x + 2\,dx = \left[3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left[x^3 - 2x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$

$$= 8 - 2\cdot 4 + 4 - (-1-2-2) = 4 + 5 = 9$$

5.5.16 $\int_{-1}^{1} 2^x\,dx = \int_{-1}^{1} (e^{\ln(2)})^x\,dx = \int_{-1}^{1} e^{\ln(2)x}\,dx =$

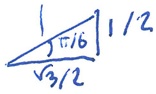
Inrederivata!

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \underbrace{\ln(2)\, e^{\ln(2)x}}_{=\frac{d}{dx} e^{\ln(2)x}}\,dx = \left[\frac{1}{\ln(2)} e^{\ln(2)x}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{\ln(2)} 2^x\right]_{-1}^{1} = \frac{2^1 - 2^{-1}}{\ln(2)} = \frac{3}{2\ln(2)}$$

$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

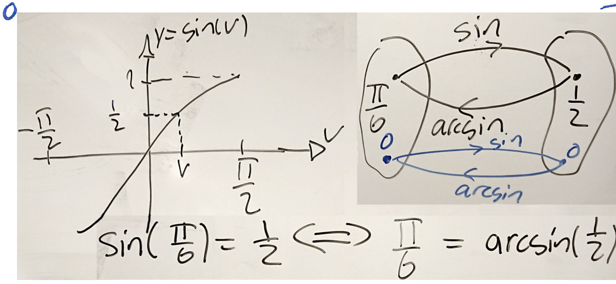
5.5.9

$$\int_{-\pi/4}^{-\pi/6} \cos(x)\,dx = \left[\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{-\pi/6} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$



5.5.18

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\sin^{-1}(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sin^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$



5.5.26

Beräkna arean mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = \frac{x}{2}$.

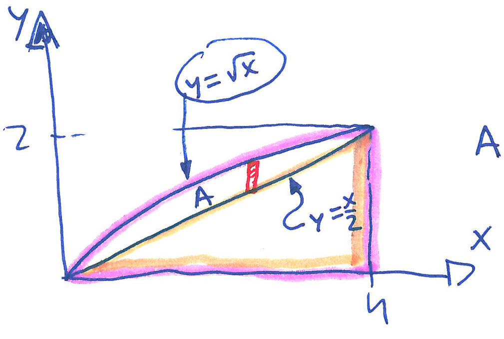
Skärningspunkter: $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$

$$0 = \frac{x}{2} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)$$

$\sqrt{x} = 0$ eller $\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0$

$\sqrt{x} = 2$

$x = 0$ eller $x = 4$



A =  −  $= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \int_0^4 \frac{x}{2}\,dx = \int_0^4 \underbrace{\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)}\,dx$

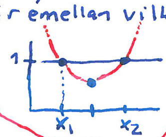
"övre funktionen – undre funktionen"
Så blir det alltid, se rutan mitt på sid 326. (Adams är tyvärr lite virrpanna ibland och ger uppgifter innan han visat hur man löser dem.)

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x\right)dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\right]_0^4 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \frac{1}{\cancel{4}}\,4^{\cancel{2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{4\cdot 3}{3} = \frac{4}{3} \text{ areaenheter}$$

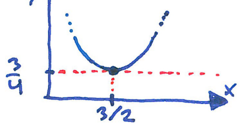
Alternativ i uppg 5.5.25:
När ni räknat ut skärningspunkter x_1, x_2; kolla för ett x-värde däremellan vilken kurva som är överst.



TIPS för uppgift 5.5.25:

Vill ni snabbt skissa graf för $y = x^2 - 3x + 3$ så kvadratkomplettera:

$$y = x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$



5.5.40

$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{d}{dt} - \int_3^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

$$= -\frac{d}{dt}\int_3^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\frac{\sin(t)}{t}$$

5.5.42 $\quad \frac{d}{dx}\, x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u}\,du =$

$$= 2x \cdot \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u}\,du + \cancel{x^2} \cdot \frac{\sin(x^2)}{\cancel{x^2}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{inre derivatan!}} =$$

$$= 2x \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u}\,du + 2x \sin(x^2)$$

Bevis av Teorem 5

1) $$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

$= f(c)$ för något c mellan x och $x+h$ enligt beviset av Teorem 4 från förra lektionen (medelvärdessatsen).

Eftersom $x \leq c \leq x+h$ så får vi att $c \to x$ då $h \to 0$ och f kontinuerlig, så $f(c) \to f(x)$

Alltså: $F'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

2) Om $G'(x) = f(x)$, så är $F(x) = G(x) + C$, för någon konstant C.

Alltså: $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) = G(x) + C$

För $x = a$ fås $0 = G(a) + C$, dvs $C = -G(a)$

För $x = b$ fås då $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$, v.s.v.