L 24 Variabelbyte. (Avsnitt 5.6) ①

Primitiva funktioner så här långt:

$\boxed{\text{Påminn om nr 1–9 från förra lektionen, motsvarande sid 318 i boken.}}$

En användbar räkneregel för integraler fås från kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$\Updownarrow$ ← Enligt definition av primitiv funktion

$$f(g(x)) + C = \int f'(g(x))\, g'(x)\, dx$$

Inför vi nya variabler $u = g(x)$ och $h(u) = f'(u)$ med obestämd integral $\int h(u)du = f(u) + C$ så får vi följande räkneregel, där vi formellt skriver om $\frac{du}{dx} = g'(x)$ till $du = g'(x)dx$:

Variabelbyte

$$\int h(g(x))\, g'(x)\, dx = \left[\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{array}\right] = \int h(u)\, du$$

Denna kan användas för att räkna ut 5.6.11 (skriv om täljaren i 5.6.11 rätt så kan nedanstående utnyttjas), så jag visar den, men efter att ha visat några enklare uppgifter från nästa sida

Uppg. 5.6.17

$$\int \frac{1 \cdot e^{-x}}{(e^x+1)\cdot e^{-x}} dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \left[\begin{array}{l} u = 1+e^{-x} \\ du = -e^{-x}dx \end{array}\right] = -\int \frac{1}{u} du = -\ln(|u|) + C$$

$$= -\ln(|1+\underbrace{e^{-x}}_{>0}|) + C = \underline{-\ln(1+e^{-x}) + C}$$

Vad skall man derivera för att få $\sin(ax)$?

$$a \neq 0, \quad \int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

Division med inre derivata blir det bara om inre derivatan är konstant!

$$a \neq 0 \quad \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

Motsvarande gäller inte för sammansatta funktioner i allmänhet:

$$\int \cos(x^2)dx \neq \frac{1}{2x}\sin(x^2) + C, \text{ ty } \frac{d}{dx}\frac{\sin(x^2)}{2x} = \frac{\cos(x^2)\cdot 2x \cdot \cancel{2}x - \sin(x^2)\cdot \cancel{2}}{\cancel{4}_{2}\, x^2} = \frac{2x\cos(x^2) - \sin(x^2)}{2x^2}$$

2

5.6.2

$$\frac{1}{a}\int \cos(ax+b)\,a\,dx = \begin{bmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{a}\sin(u) + C$$

$$= \underline{\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C}$$

5.6.4

$$\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{2x} \\ du = 2e^{2x}\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(u) + C = \underline{-\frac{1}{2}\cos(e^{2x}) + C}$$

5.6.10

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\tan^2(x)}}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \begin{bmatrix} u = \tan(x) \\ du = \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \sin^{-1}(u) + C = \underline{\sin^{-1}(\tan(x)) + C}$$

5.6.12

$$\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \begin{bmatrix} u = \ln(t) \\ du = \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \underline{\frac{(\ln(t))^2}{2} + C}$$

5.6.16

$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{2+x^6}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^3 \\ du = 3x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,du$$

$$= \begin{bmatrix} v = \frac{u}{\sqrt{2}} \\ dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\,du \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}(v) + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Räcker egentligen att veta att

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}(x) + C \quad \text{an} \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x)$$

ty då kan man även räkna ut

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = a\cdot\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}\,dx = \begin{bmatrix} u = x/a \\ du = \frac{1}{a}\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}(u) + C = \underline{\underline{\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}}$$

och, för $a \neq 0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{|a|\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \begin{bmatrix} u = \frac{x}{a} \\ du = \frac{1}{a}\,dx \end{bmatrix} = \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \operatorname{sgn}(a)\sin^{-1}(u) + C = \operatorname{sgn}(a)\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

För integrering av $\cos^2(x)$ och $\sin^2(x)$ kan man använda att

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Ex 9

$$\int \sin^4(x)\,dx = \int \left(\sin^2(x)\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx$$

Inre derivata !

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3}{2}\,dx - \frac{1}{4}\int \underbrace{\cos(2x)\cdot 2}_{=\frac{d}{dx}\sin(2x)}\,dx + \frac{1}{4\cdot 8}\int \underbrace{\cos(4x)\cdot 4}_{=\frac{d}{dx}(\sin(4x))}\,dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

För $\sin^n(x)$ eller $\cos^n(x)$ med udda n kan man räkna som i följande exempel:

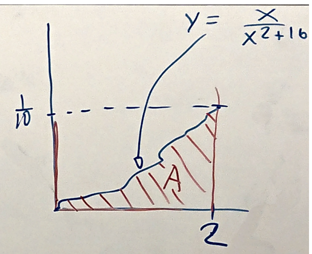
$$\int \sin^5(x)\,dx = \int \left(\sin^2(x)\right)^2 \sin(x)\,dx = \int \left(1-\cos^2(x)\right)^2 \sin(x)\,dx = \begin{bmatrix} u=\cos(x) \\ du=-\sin(x)\,dx \\ -du=\sin(x)\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= -\int (1-u^2)^2\,du = -\int (1-2u^2+u^4)\,du = -\left(u-2\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}\right)+C = \underline{-\cos(x)+\frac{2}{3}\cos^3(x)-\frac{1}{5}\cos^5(x)+C}$$

5.6.46 Beräkna arean begränsad av $y=\frac{x}{x^2+16}\ge 0$, $y=0$, $x=0$, $x=2$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+16}\,dx = \begin{bmatrix} u=x^2+16 \\ du=2x\,dx \\ x=0\Rightarrow u=16 \\ x=2\Rightarrow u=20 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_{16}^{20}\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\Big[\ln(|u|)\Big]_{16}^{20} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(20)-\ln(16)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{20}{16}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$ areaenheter



Ibland är kvadratkomplettering bra att ha:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-(\underbrace{x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}_{(x-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{4})}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\underbrace{2-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}_{\frac{9}{4}}}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}\left(1-\frac{4}{9}(x-\frac{1}{2})^2\right)}}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})\right)^2}}\,dx = \begin{bmatrix} u=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} \\ du=\frac{2}{3}\,dx \\ x=0\Rightarrow u=-\frac{1}{3} \\ x=1\Rightarrow u=\frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = \underline{2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$r=\sin^{-1}(-x) \Leftrightarrow \sin(r)=-x \Leftrightarrow \sin(-r)=x \Leftrightarrow \sin^{-1}(x)=-r=-\sin^{-1}(-x)$$

Ej på lektion:

I en tidigare version av exemplet har vi ej begränsad integrand (division med 0 vid $x=-1$ och $x=2$), så översumma och integral ej definierad, men när vi definierat generaliserade integraler på Lektion 30 (Avsnitt 6.5 i Adams) så är följande integral definierad via gränsvärden:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-(x^2-x)}}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2)}}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-\left((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right)}}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx = \begin{bmatrix} u=x-\frac{1}{2} \\ du=dx \\ x=-1\Rightarrow u=-\frac{3}{2} \\ x=2\Rightarrow u=\frac{3}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-u^2}}\,du = \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}\left(1-\frac{4}{9}u^2\right)}}\,du = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{1\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}u)^2}}\,du = \begin{bmatrix} v=\frac{2}{3}u \\ dv=\frac{2}{3}\,du \\ u=-\frac{3}{2}\Rightarrow v=-1 \\ u=\frac{3}{2}\Rightarrow v=1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \Big[\sin^{-1}(v)\Big]_{-1}^{1} = \sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\pi}}$$