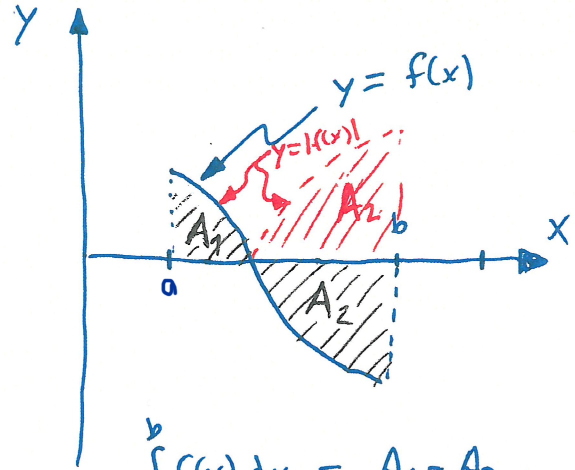
L25 Area av yta (Adams avsnitt 5.7)

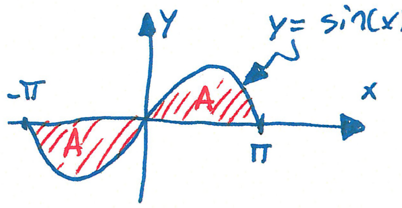
Kom ihåg: Integral ger arean mellan kurva och x-axel.



$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$. Vill man räkna ut $A_1 + A_2$ så tag absolutbeloppet:

$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$

Ex:



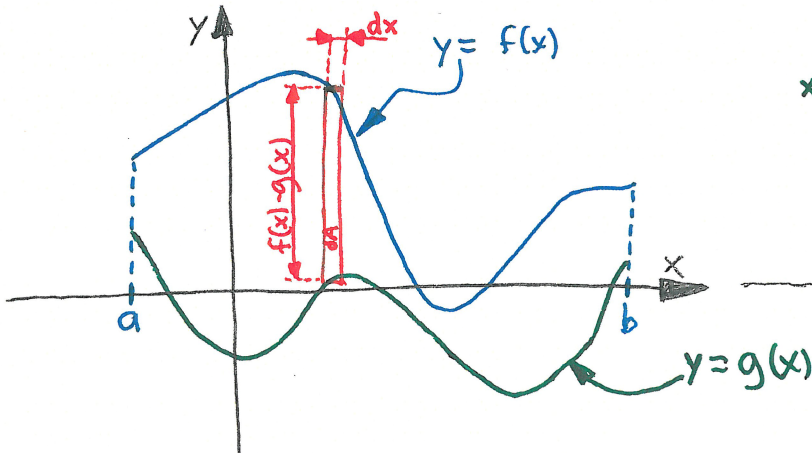
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = A - A = 0$ areaenheter

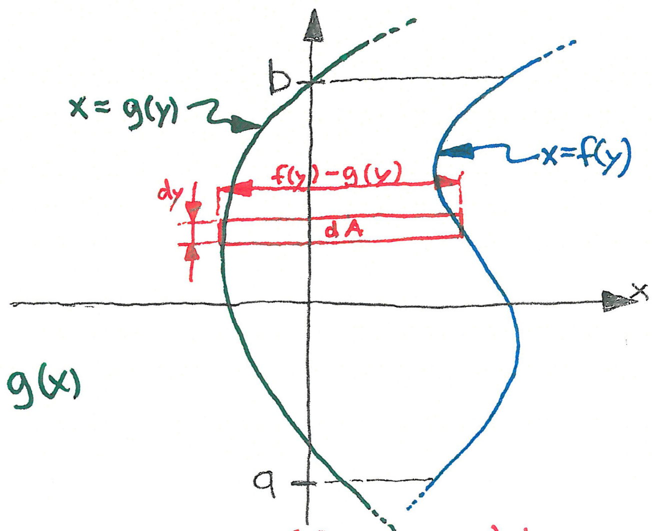
$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,dx = 2\int_0^{\pi} |\sin(x)|\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx =$

$= 2\cdot\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = 2\cdot(-(-1)-(-1)) =$

$= 2\cdot 2 = 4$ areaenheter

Area mellan två kurvor i ett intervall [a,b]





Arean = "summa av rektangelareor" $dA = (f(x) - g(x))\,dx$

$\text{Arean} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

$dA = (f(y) - g(y))\,dy$

$\text{Arean} = \int_a^b (f(y) - g(y))\,dy$

② Uppg. 5.7.4

Bestäm arean mellan kurvorna $y = x^2 - 2x = f(x)$ och $y = 6x - x^2 = g(x)$

Skärningspunkt: $x^2 - 2x = 6x - x^2$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x-4) = 0$$

$x = 0$ eller $x = 4$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$y = 0$ $\qquad$ $y = 16 - 2\cdot 4 = 8$

$(x,y) = (0,0)$ $\qquad$ $(x,y) = (4,8)$

Vilken är överst? Samma i hela intervallet $0 < x < 4$, så sätt t ex in $x = 2$.

$f(2) = 4 - 4 = 0$ $\qquad$ $g(2) = 12 - 4 = 8$ $\qquad$ g överst!

Arean mellan kurvorna blir då

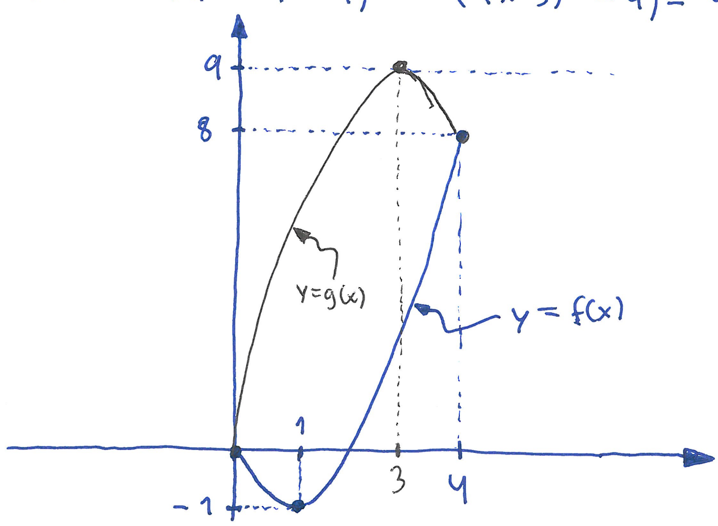
$$A = \int_0^4 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x))\,dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \left[8\cdot\frac{x^2}{2} - 2\,\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = 64 - \frac{2}{3}\cdot 64 = 64\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{64}{3}\text{ areaenheter}}}$$

Klart! ... men ibland kanske man vill skissa upp funktionskurvor också, och för andragradspolynom gör kvadratkomplettering detta enklare:

$$f(x) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

$$g(x) = -(x^2 - 2\cdot 3x + 9 - 9) = -((x-3)^2 - 9) = 9 - (x-3)^2$$



3

5.7.6 Beräkna arean mellan $x-y=7$ och $x=2y^2-y+3$ Enklast här attse x som funktion av y.

$x=7+y=f(y)$ $\quad x=2y^2-y+3=g(y)$

Vart korsar funktionskurvorna varandra?

$$f(y)=g(y)$$

$$7+y=2y^2-y+3$$

$$0=2y^2-2y-4=2(y^2-y-2)$$

$$y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1\pm3}{2}$$

$y=-1$ eller $y=2$

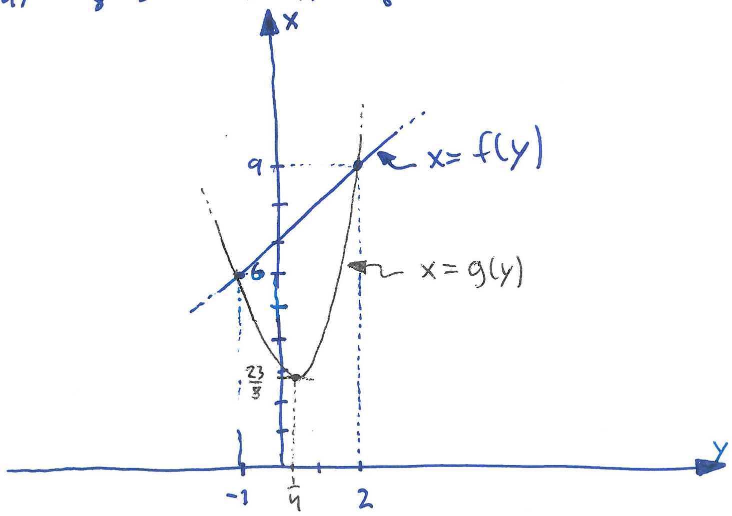
Vilken av kurvorna ligger överst för $-1<y<2$?
Samma i hela intervallet, ty kontinuerliga kurvor. Vi har till exempel $g(1)=4$ och $f(1)=8>g(1)$, så f är överst (om man vrider så x-axeln pekar uppåt) och arean mellan kurvorna är

$$A=\int_{-1}^{2}(f(y)-g(y))\,dy=\int_{-1}^{2}(7+y-(2y^2-y+3))\,dy=\int_{-1}^{2}(-2y^2+2y+4)\,dy$$

$$=\left[-2\cdot\frac{y^3}{3}+\cancel{2}\cdot\frac{y^2}{\cancel{2}}+4y\right]_{-1}^{2}=-\frac{2}{3}\cdot8+4+8-\left(-\frac{2}{3}\cdot(-1)+1-4\right)=$$

$$=-\frac{16}{3}+12-\frac{2}{3}+3=-\frac{18}{3}+15=-6+15=9 \text{ areaenheter}$$

$$g(y)=2\left(y^2-\frac{1}{2}y\right)+3=2\left(y^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot y+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+3=2\left(\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)+3=$$
$$=2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+3=2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

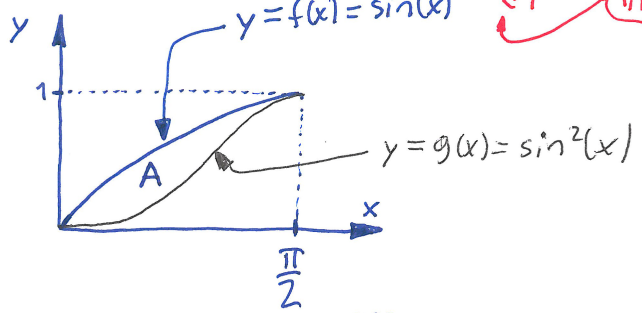


④ 5.7.19

Sökt: Arean begränsad av $y = \sin(x) = f(x)$ och $y = \sin^2(x) = g(x)$, $x=0$ och nästa skärningspunkt till höger.

För $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ är $g(x) = \sin^2(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\substack{\geq 0 \\ \leq 1}} f(x)$, så $0 \leq g(x) \leq f(x) \leq 1$

likhet då $x = \frac{\pi}{2}$



$$A = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin(x) - \sin^2(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\cos(2x)}_{=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin(2x))}\right) dx = \left[-\cos(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -0 - \frac{\pi}{4} + 0 - (-1 - 0 + 0) = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ areaenheter}$$