L27-28 Partiell integration. Integration av rationella funktioner

Adams avsnitt 6.1–6.2

Derivata av produkt:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) - f'(x)g(x)$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int\left(\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) - f'(x)g(x)\right)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Alltså har vi

Partiell integration (integration by parts)

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

eller motsvarande för bestämda integralen:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \underbrace{\left[f(x)\,g(x)\right]_a^b}_{\text{"plockat bort ett prim-tecken" här...}} - \int_a^b \underbrace{f'(x)\,g(x)}_{\text{... och flyttat det till andra funktionen här.}}\,dx$$

Ex

- $\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} - \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\,dx = x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx =$

  $= x\ln(x) - x + C$

- $\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx = -x^2\cos(x) + 2\int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)}\,dx =$

  $= -x^2\cos(x) + 2\left(\underbrace{x\cdot\sin(x)}_{u(x)\cdot v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\,dx\right)$

  $= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$

- $\int \underbrace{x}_{g'(x)} \underbrace{\tan^{-1}(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\tan^{-1}(x)}_{f(x)} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f'(x)}\,dx =$

  $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

  $= \frac{x^2}{2}\cdot\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C$

  $= \frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{x}{2} + C$

- $\int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\sin^{-1}(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin^{-1}(x)}_{f(x)} - \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{f'(x)}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x\,dx \end{array}\right] =$

  $= x\cdot\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}\int \overbrace{\frac{1}{\sqrt{u}}}^{=u^{-\frac{1}{2}}}\,du = x\cdot\sin^{-1}(x) + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{u^{1/2}}{\cancel{1/2}} + C = x\cdot\sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

Tjänar inget till att byta $g(x)$ mot $g(x)+C$ här, ty det blir samma sak:

$$f(x)\cdot(g(x)+C) - \int f'(x)\cdot(g(x)+C)\,dx = f(x)g(x) + \underbrace{f(x)\cdot C - \int f'(x)\cdot C\,dx}_{=0+C_2} - \underbrace{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx}_{\text{ger } \langle\text{primitiv funktion}\rangle + C_3}$$

och sen slår man ihop $C_2 + C_3 = C$, så därför brukar man vänta med "+C" till sista $\int\cdots dx$ är uträknad.

② Ex 4

Ibland kan man få ursprungliga integralen att dyka upp på nytt som en del av högerledet:

$$I = \int \underset{f(x)}{e^{ax}} \underset{g'(x)}{\cos(bx)}\,dx = \underset{f(x)}{e^{ax}} \cdot \underset{g(x)}{\tfrac{1}{b}\sin(bx)} - \int \underset{f'(x)}{a e^{ax}} \cdot \underset{g(x)}{\tfrac{1}{b}\sin(bx)}\,dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin(bx) - \frac{a}{b} \int \underset{u(x)}{e^{ax}} \underset{v'(x)}{\sin(bx)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin(bx) - \frac{a}{b}\left(\underset{u(x)}{e^{ax}} \cdot \underset{v(x)}{\left(-\tfrac{1}{b}\cos(bx)\right)} - \int \underset{u'(x)}{a e^{ax}} \cdot \underset{v(x)}{\left(-\tfrac{1}{b}\cos(bx)\right)}\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos(bx)\,dx$$

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} I + C_1$$

$$I\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot b^2 = \left(\frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) + C_1\right) \cdot b^2$$

$$I = \frac{b e^{ax} \sin(bx) + a e^{ax} \cos(bx)}{b^2 + a^2} + C$$

Ex

$$\int \underset{f(x)}{x} \underset{g'(x)}{e^x}\,dx = \underset{f(x)}{x} \underset{g(x)}{e^x} - \int \underset{f'(x) \cdot g(x)}{1 \cdot e^x}\,dx = x e^x - e^x + C \qquad (*)$$

Man kan använda samma teknik för att räkna ut $\int x^n e^x\,dx$ genom att steg för steg minska gradtalet med 1 (från x^n till x^{n-1} till x^{n-2} till --- till x^0.

$$I_n = \int \underset{f(x)}{x^n} \underset{g'(x)}{e^x}\,dx = \underset{f(x)}{x^n} \underset{g(x)}{e^x} - \int \underset{f'(x)}{n x^{n-1}} \underset{g(x)}{e^x}\,dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I_n = x^n e^x - n I_{n-1} \quad \text{och} \\ I_0 = \int x^0 e^x\,dx = e^x + C \end{array}}$$

En så'n här lösning kallas rekursionsformel eller (på Engelska) reduction formula.

Ger till exempel att

$I_0 = e^x + C$

$I_1 = x e^x - I_0 = x e^x - e^x - C$ (som i $(*)$)

$I_2 = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C_2$

$I_3 = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C_3$

$I_4 = x^4 e^x - 4I_3 = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24 e^x + C_4$

o sv...

6.1.9 (Enklare med "inverse sine substitution", men det lär vi oss först i avsnitt 6.3.)

$$\int \underset{f'(x)}{x} \cdot \underset{g(x)}{\sin^{-1}(x)}\,dx = \underset{f(x)}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{g(x)}{\sin^{-1}(x)} - \int \underset{f(x)}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{g'(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \sin^{-1}(x) + \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\text{kalla denna } I} = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2} \cdot I \quad (*)$$

Där vi har

$$I = \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = -\sin^{-1}(x) + \int \underset{f'(x)}{1} \cdot \underset{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$I = -\sin^{-1}(x) + \underset{f(x)}{x} \cdot \underset{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \int \underset{f(x)}{x} \cdot \underset{g'(x)}{\frac{1}{\cancel{2}} \frac{-\cancel{2}x}{\sqrt{1-x^2}}}\,dx = -\sin^{-1}(x) + x \cdot \sqrt{1-x^2} - \underbrace{\int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{=I}$$

$$2I = -\sin^{-1}(x) + x\sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$I = -\frac{1}{2}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C_2 \text{ insättes i } (*)$$

$$\int x \cdot \sin^{-1}(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}(x) - \frac{1}{4}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\boxed{\text{SVAR: } \int x \cdot \sin^{-1}(x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin^{-1}(x) + \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} + C}$$

④ PARTIALBRÅKSUPPDELNING OCH INTEGRATION AV RATIONELLA FUNKTIONER

För rationella funktioner $\frac{P(x)}{Q(x)}$ där P har lägre gradtal än Q och Q har grad högst 2 kan vi räkna ut primitiv funktion:

- $\frac{1}{a}\int \frac{1}{ax+b} a\,dx = \begin{bmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{a}\ln(|u|)+C = \frac{1}{a}\ln(|ax+b|)+C$

För $a \geq 0$ kan vi med kvadratkomplettering och variabelbyte skriva om $Q(x)$ av grad 2 som följer:

- $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 \pm a}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \pm a \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C = \frac{1}{2}\ln(|x^2 \pm a|)+C$
- $\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1\cdot\sqrt{a}}{a}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1}\frac{1}{\sqrt{a}}\,dx = \begin{bmatrix} u = \frac{x}{\sqrt{a}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{a}}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}(u)+C = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{a}})+C$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = ?$

Hinns kanske ej med på lektion?

För att lösa detta försöker vi hitta konstanter A och B sådana att

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{(x+a)A}{(x+a)(x-a)} + \frac{B(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x+a)(x-a)} = \frac{(A+B)x+(A-B)a}{x^2-a^2}$$

För att samma täljare längst till höger som i $\frac{1}{x^2-a^2}$ så måste

$$0x + 1 = (A+B)x + (A-B)a$$

Krävs alltså att

$$\begin{cases} A+B=0 \\ (A-B)a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2Aa=1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2a},\ B = -\frac{1}{2a}.$$

Alltså är

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2a}}{x-a} - \frac{\frac{1}{2a}}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\ln(|x-a|) - \ln(|x+a|)\right)+C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2a}\ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)+C}}$$

Tekniken att dela upp i en summa av termer med förstagradspolynom i nämnaren kallas <u>partialbråksuppdelning</u>; funkar alltid när täljaren har lägre gradtal än nämnaren och nämnaren kan skrivas som produkt $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ med $a_1, a_2, \ldots, a_n$ <u>olika</u>. Några exempel:

<u>6.2.10</u> $I = \int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx = ?$

För att faktorisera nämnaren kollar vi först nollställen:

$$3x^2+8x-3=0$$

$$x^2+\frac{8}{3}x-1=0$$

$$x = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}+1} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}$$

$$x=-3 \text{ eller } x=\frac{1}{3}$$

Alltså är $3x^2+8x-3 = 3(x^2+\frac{8}{3}x-1) = 3(x-\frac{1}{3})(x+3) = (3x-1)(x+3)$

Det finns två vanliga sätt att göra partialbråksuppdelning:

1) Som på förra sidan. Vi söker A och B sådana att

$$\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{(x+3)A}{(x+3)(3x-1)} + \frac{B(3x-1)}{(x+3)\cdot(3x-1)} = \frac{Ax+3A+3Bx-B}{(x+3)(3x-1)} = \frac{(A+3B)x+3A-B}{(3x-1)(x+3)}$$

krävs alltså att

$$\begin{cases} A+3B=1 & (*) \\ 3A-B=0 \end{cases} \Rightarrow B=3A, \text{ insättning i } (*) \text{ ger}$$

$$A+9A=1$$

$$A=\frac{1}{10} \quad \text{och } B=3A=\frac{3}{10}, \text{ dvs}$$

$$\boxed{\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{\frac{1}{10}}{3x-1} + \frac{\frac{3}{10}}{x+3}} \quad (\square)$$

2) "Handpåläggning"

$$\frac{x}{(3x-1)(x+3)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+3}$$

i) Multiplicera VL och HL med $3x-1$ och sätt $x=\frac{1}{3}$:

$$\frac{x}{x+3} = A + \frac{B(3x-1)}{x+3} \quad \text{sätt } x=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 3}{(\frac{1}{3}+3)\cdot 3} = A + 0$$

ii) Multiplicera VL och HL med $x+3$ och sätt $x=-3$:

$$\frac{x}{3x-1} = \frac{A(x+3)}{3x-1} + B \quad \text{sätt } x=-3$$

$$\frac{3}{10} = \frac{-3}{-10} = 0 + B$$

Detta ger återigen $(\square)$.

När partialbråksuppdelningen $(\square)$ är gjord kan vi räkna ut integralen:

$$\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{1}{3x-1}\,dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\ln(|3x-1|) + \frac{3}{10}\ln(|x+3|) + C$$

SVAR:

$$\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx = \frac{1}{30}\ln(|3x-1|) + \frac{3}{10}\ln(|x+3|) + C$$

⑥ Om gradtalet inte är mindre i täljaren så kan detta fixas med polynomdivision

Exempel 4 $\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = ?$

I enklare fall som detta kan man göra polynomdivisionen med enkel omskrivning av täljaren:

$$\frac{x^3+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x+x+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x}{x^3-x} + \frac{x+2}{x^3-x} = 1 + \frac{x+2}{x(x^2-1)}$$

$$= 1 + \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Handpåläggning ger:

$$A = \frac{0+2}{(-1)\cdot 1} = -2$$

$$B = \frac{1+2}{1\cdot(1+1)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{-1+2}{(-1)\cdot(-1-1)} = \frac{1}{2}$$

Alltså är

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = \int \left(1 - 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x - 2\ln(|x|) + \frac{3}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C$$

6.2.16 $\int \frac{x^3+1}{x^2+7x+12}\,dx = ?$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l} & x - 7 \\ \hline x^2+7x+12 & x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ & -(x^3 + 7x^2 + 12x\quad) \\ \hline & -7x^2 - 12x + 1 \\ & -(-7x^2 - 49x - 84) \\ \hline & 37x + 85 \end{array}$$

vi har alltså att

$$\frac{x^3+1}{x^2+7x+12} = x-7 + \frac{37x+85}{\underbrace{x^2+7x+12}_{=0 \text{ då } x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{-7\pm1}{2}}} = x+7 + \frac{37x+85}{(x+4)(x+3)}$$

$x=-4$ eller $x=-3$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{37x+85}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+3}$$

Handpåläggning ger:

$$A = \frac{-37\cdot4+85}{-4+3} = \frac{-148+85}{-1} = \frac{-63}{-1} = 63$$

$$B = \frac{-37\cdot3+85}{-3+4} = -111+85 = -26$$

Alltså är

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+7x+12}\,dx = \int \left(x-7+\frac{63}{x+4}-\frac{26}{x+3}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 7x + 63\ln(|x+4|) - 26\ln(|x+3|) + C$$

Då täljaren har en faktor $(x-a)^m$ funkar också partialbråksuppdelning, men då ger den faktorn termerna $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$

Exempel 7 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = ?$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 A}{(x-1)^2 x} + \frac{x(x-1)\,B}{x(x-1)(x-1)} + \frac{x\cdot C}{x\cdot(x-1)^2} = \frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2-(2A+B-C)x+A}{x(x-1)^2}$$

Alltså: $A=1$

$A+B=0 \Rightarrow B=-A=-1$

$2A+B-C=0 \Rightarrow C=2A+B=2-1=1$

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx =$$

$$= \ln(|x|) - \ln(|x-1|) + \frac{(x-1)^{-1}}{(-1)} + C$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x}{x-1}\right|\right) - \frac{1}{x-1} + C$$

⑧ Då täljaren innehåller faktorer $(x^2+bx+c)^n$, heltal $n \geq 1$ så funkar också partialbråksuppdelning, men då ger den faktorn termerna

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Exempel 8

$$\frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} = \frac{(2x+1)^2 A}{(2x+1)^2\cdot x} + \frac{x\cdot(2x+1)\,Bx+C}{x\cdot(2x+1)(2x^2+1)} + \frac{(Dx+E)\cdot x}{(2x^2+1)^2\cdot x} =$$

$$= \dots = \frac{A(4x^4+4x^2+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{x(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(4A+2B)x^4 + 2Cx^3 + (4A+B+D)x^2 + (C+E)x + A}{x(2x^2+1)^2}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-4 \\ C=0 \\ D=-3 \\ E=0 \end{array}$$

OBS! Här klarar man sig bra utan Gausseliminering! (Se sidan 10.)

Alltså är

$$\int \frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{4x}{2x^2+1} - \frac{3x}{(2x^2+1)^2}\right)dx$$

$$= 2\ln(|x|) - \int \left(\frac{\frac{1}{4}\cdot 4x}{2x^2+1} + \frac{\frac{1}{4}3x}{(2x^2+1)^2}\right)4\,dx = \begin{bmatrix} u=2x^2+1 \\ du=4x \end{bmatrix} =$$

$$= 2\ln(|x|) - \int \left(\frac{1}{u} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{u^2}\right)du =$$

$$= 2\ln(|x|) - \ln(|u|) - \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{u}\right) + C =$$

$$= \ln(|x^2|) - \ln(|2x^2+1|) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+1} + C$$

$$= \ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+1}$$

Se Teorem 1, sid 345 för sammanfattning av hur man gör partialbråksuppdelning.

Sammanfattning

Notera att en "x-term" i täljaren inte skulle tillföra något:
$\frac{Bx+C}{(x-a)^2} = \frac{Bx-Ba+BaC}{(x-a)^2} = \frac{B\cancel{(x-a)}}{(x-a)^{\cancel{2}}} + \frac{Ba+C}{(x-a)^2} = \frac{B}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2}$, med $B_2 = Ba+C$.

Faktor i nämnaren	Ger i ansats upphov till termen
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^2$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
$(x-a)^n$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^2$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}$
$(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Exempel på ansatser

- x^2+5x+7 kan ej faktoriseras till $x^2+5x+7 = (x-a)(x-b)$ med reella konstanter, ty $x^2+5x+7=0$ har ingen reellvärd lösning (försöker man med pq-formeln så får man $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 7} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{25}{4} - \frac{28}{4}}_{\text{Negativt!}}}$).

  Vi får därför ansatsen

$$\frac{5x^2}{(x^2+5x+7)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+5x+7} + \frac{C}{x+1}$$

- $$\frac{-x^2-5}{(x^2+5x+7)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+5x+7} + \frac{Cx+D}{(x^2+5x+7)^2} + \frac{E}{x+1}$$

- $$\frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

- $$\frac{x^2+3x+4}{(x-3)^2(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+7}$$

- $$\frac{1}{(x^4-1)} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Efter att ha räknat ut A, B, C och D kan man utnyttja att $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln(|x-1|)+C_1$, $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(|x+1|)+C_2$, $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\begin{matrix} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C_3 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_3$ och $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}(x)+C_4$

Det behövs ingen Gausseliminering i Exempel 8 på sidan 8:

Ank. 6.2

Exempel 8: $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2}\,dx = ?$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} = \frac{A(2x^2+1)^2}{x(2x^2+1)^2} + \frac{(Bx+C)(2x^2+1)\cdot x}{(2x^2+1)(2x^2+1)\cdot x} + \frac{x\cdot(Dx+E)}{x\cdot(2x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A(4x^4+4x^2+1) + B(2x^4+x^2) + C(2x^3+x) + Dx^2 + Ex}{x(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{(4A+2B)}^{=0}x^4 + \overbrace{2C}^{=0}x^3 + \overbrace{(4A+B+D)}^{=1}x^2 + \overbrace{(C+E)}^{=0}x + \overbrace{A}^{=2}}{x(2x^2+1)^2}$$

Ger att
- $A=2$, $C=0$, $\Downarrow$
- $C+E=0 \Rightarrow E=0$
- $4A+2B=0 \Rightarrow 2B=-4A \Rightarrow B=-2A=-4$
- $4A+B+D=1 \Rightarrow D=1-4A-B=1-4\cdot 2-(-4)=1-8+4=-3$

Alltså är

$$\int \frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{4x}{2x^2+1} - \frac{3x}{(2x^2+1)^2}\right)dx =$$

$\displaystyle\int \frac{4x}{2x^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} u=2x^2+1 \\ du=4x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|)+C_1 = \ln(|2x^2+1|)+C_1$

$\displaystyle\frac{1}{4}\int \frac{4x}{(2x^2+1)^2}\,dx = \begin{bmatrix} u=2x^2+1 \\ du=4x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int u^{-2}\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C_2 = -\frac{1}{4u}+C_2 = -\frac{1}{4(2x^2+1)}+C_2$

$$= 2\ln(|x|) - \ln(|2x^2+1|) + \frac{3}{4(2x^2+1)} + C$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x^2}{2x+1}\right|\right) + \frac{3}{8x^2+4} + C$$

Vid lösningen av Exempel 7 på sidan 7 användes standardmetoden för identifiering av koefficienter vid partialbråksuppdelning. Den fungerar alltid, så vill man konsekvent alltid använda samma metod alltid så är det den man kan lära sig.

Handpåläggning kan dock spara tid när man enbart har förstagradsfaktorer i nämnaren. Handpåläggning kan även användas för att bestämma *A* och *C* i Exempel 7. Sedan får *B* bestämmas som på sidan 7, eller (eftersom ekvationen skall gälla för alla *x*) välja något värde på *x* som ger enkla beräkningar och sedan lösa ut *B*:

Ex 7 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = ?$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Handpåläggning ger: $A = \frac{1}{(0-1)^2} = 1$, $C = \frac{1}{1} = 1$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \qquad \text{sätt } x=-1$$

$$\frac{1}{-1\cdot(-2)^2} = -1 + \frac{B}{-2} + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = -\frac{B}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = +\frac{B}{2}$$

$$B = -1$$

Alltså är $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \overbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}^{=(x-1)^{-2}}\right)dx = \overbrace{\ln(|x|) - \ln(|x-1|)}^{=\ln\left(\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)} + \overbrace{\frac{(x-1)^{-1}}{-1}}^{=-\frac{1}{x-1}} + C$