# L30 Generaliserad integral (Adams 6.5)

**Definition 1**

För $f$ kontinuerlig på $[a,\infty)$ och $g$ kontinuerlig på $(-\infty, b]$ så definierar vi

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^b g(x) = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b g(x)\,dx.$$

Man säger att integralen <u>divergerar</u> om gränsvärdet blir $\pm\infty$ och att integralen <u>konvergerar</u> om gränsvärdet finns och är ett tal.

**6.5.2**

$$\int_3^\infty \frac{1}{(2x-1)^{2/3}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_3^R \frac{1}{(2x-1)^{2/3}}2\,dx = \left[\begin{array}{l} u=2x-1 \\ du = 2\,dx \\ x=3 \Leftrightarrow u=5 \\ x=R \Leftrightarrow u=2R-1 \end{array}\right] = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_5^{2R-1} u^{-2/3}\,du =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{3\cdot u^{1/3}}{3\cdot 1/3}\right]_5^{2R-1} = \lim_{R\to\infty} \frac{3}{2}\Big(\underbrace{\sqrt[3]{2R-1}}_{\to\infty} - \sqrt[3]{5}\Big) = \infty.$$

Integralen divergerar alltså.

För $f$ kontinuerlig på hela reella tallinjen $\mathbb{R}$ skriver vi

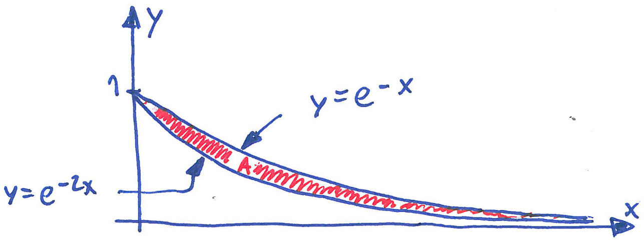
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

**6.5.22**

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx + \int_0^\infty e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{R_1\to-\infty} \int_{R_1}^0 e^x\,dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} e^{-x}\,dx = \lim_{R_1\to-\infty}\big(e^0 - \overbrace{e^{R_1}}^{\to 0}\big) + \lim_{R_2\to\infty}\big(\overbrace{-e^{-R_2}}^{\to 0} + e^0\big) = 2$$

**6.5.24** Sökt: Arean under $y=e^{-x}$, över $e^{-2x}$ och till höger om $x=0$.




$$A = \int_0^\infty \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)dx = \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x} + \tfrac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\Big(\underbrace{-e^{-R}}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{-2R}}_{\to 0} + e^0 - \tfrac{1}{2}e^0\Big) = \frac{1}{2} \text{ areaenhet.}$$

②

**Definition 2**

Om $f$ är kontinuerlig på $(a,b]$ och $g$ är kontinuerlig på $[a,b)$ så definierar vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int_a^b g(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c g(x)\,dx$$

Även här säger vi att integralen konvergerar om gränsvärdet finns och är ändligt och att den divergerar om gränsvärdet är $\pm\infty$.

**6.5.7**

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx = \lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx = \begin{bmatrix} u=1-x \\ du=-dx \\ x=0 \Leftrightarrow u=1 \\ x=c \Leftrightarrow u=1-c \end{bmatrix} = \lim_{c\to 1-} \int_1^{1-c} u^{-\frac{1}{3}}\,du = \lim_{c\to 1-} \left[\frac{u^{2/3}}{2/3}\right]_1^{1-c}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{c\to 1-} \Big( (\underbrace{1-c}_{\to 0+})^{2/3} - 1 \Big) = \frac{3}{2}$$

**Ex 6** $$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,dx = \lim_{c\to 0+}\left( \Big[x\ln(x)\Big]_c^1 - \int_c^1 \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx \right)$$

$$= \lim_{c\to 0+}\Big( 0 - \underbrace{c\cdot\ln(c)}_{\to 0} - \big[x\big]_c^1 \Big) = \lim_{c\to 0+}(-1+c) = -1$$

**Teorem 3**

Om $-\infty \le a < b \le \infty$, $f,g$ kontinuerliga på $(a,b)$ och $f(x)\le g(x)$, så är

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

**Bevis** För $a<r<s<b$ vet vi sedan tidigare att

$$\int_r^s f(x)\,dx \le \int_r^s g(x)\,dx$$

Tar vi gränsvärde då $r\to a+$ och $s\to b-$ så får vi Teorem 3. v.s.v.

**6.5.32** Avgör om integralen $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$ konvergerar eller divergerar.

Integranden är $\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{x^{3/2}}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}_{\to 1 \text{ då } x\to\infty}$, uppför sig ungefär som $\frac{1}{\sqrt{x}}$ för stora $x$, och

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_2^R x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_2^R = \lim_{R\to\infty} 2\left(\sqrt{R}-\sqrt{2}\right) = \infty$$

Vi kan då använda Teorem 3:

Eftersom $\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}_{\text{avtagande funktion av } x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{x}}$ då $x \geq 2$

Eller enklare: $\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \geq 1$

så är $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx \geq \frac{4}{3}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty$,

så $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$ divergerar.

6.5.34 Avgör om $I = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$ konvergerar eller divergerar.

$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx = I_1 + I_2$, där

$I_1 = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{c\to 0+}\int_c^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{c\to 0+}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0+}(1-\sqrt{c}) = 1$

$I_2 = \int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}}_{\leq \frac{1}{x^2}}\,dx \leq \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}+1\right) = 1$

Både $I_1$ och $I_2$ konvergerar. Alltså konvergerar även $I$.