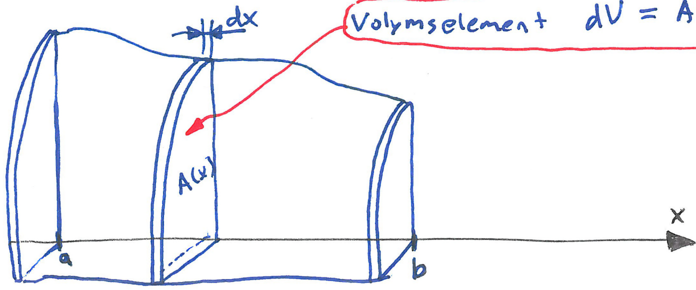
L32 Rotationsvolym område i rummet (Adams 7.1–7.2)

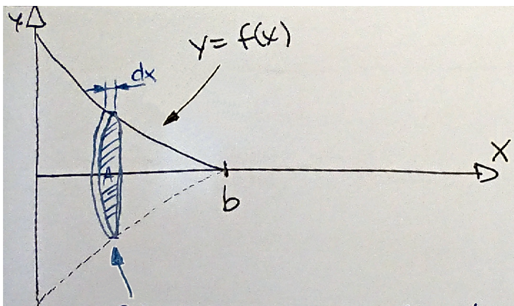
För volymer som kan skivas upp i tvärsnitt med area $A(x)$ kan volymen skrivas som integral

$$V = \int A(x)\,dx$$

Volymselement $dV = A(x)\,dx$



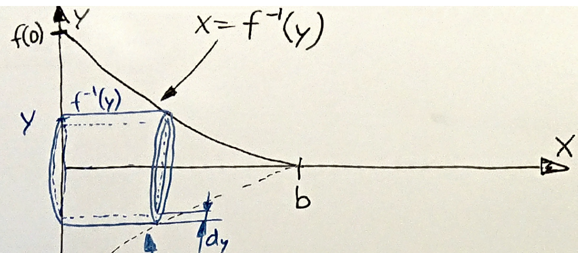
Vanligt exempel: Rotera kurva $y = f(x)$ runt x-axeln



Skivelement med tjocklek dx, tvärsnittsarea $A(x) = \pi \cdot f(x)^2$ och volym $dV = A(x)\,dx = \pi f(x)^2 dx$

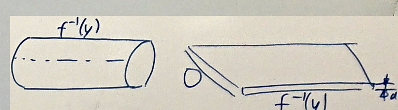
När när $y = f(x)$ roterar runt x-axeln inesluts alltså ett område med volym

$$\int_{x=0}^{x=b} dV = \int_0^b \pi\, f(x)^2 dx$$



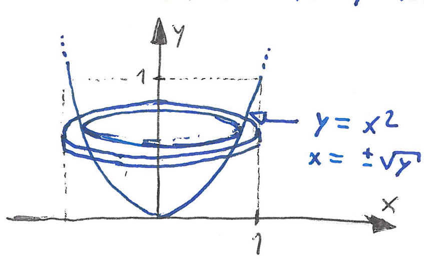
Skalelement med tjocklek dy, radie y, omkrets $O = 2\pi y$, höjd $f^{-1}(y)$ och volym $dV = 2\pi y\, f^{-1}(y)\,dy$.

Total volym: $$V = \int_0^{f(0)} 2\pi y\, f^{-1}(y)\,dy$$



7.1.2 Använd a) skivelement b) skalelement föratt beräkna volymen som fås genom rotation runt y-axeln av arean begränsad av $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$

a)

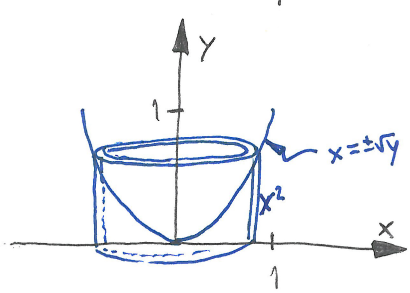


$$A(y) = \pi\, 1^2 - \pi x^2 = \pi(1-y)$$

$$V = \int_0^1 \pi(1-y)\,dy = \pi\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} \text{ volymenheter}$$

b)

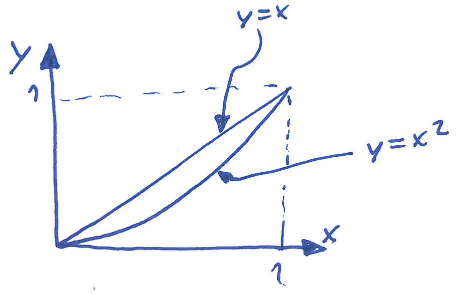


$$dV = 2\pi x \cdot x^2 dx$$

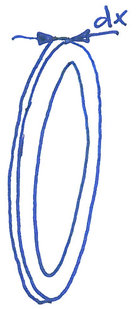
$$V = 2\pi \int_0^1 x^3\,dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ volymenheter.}$$

② **7.1.6** Låt R vara arean begränsad av $y=x$ och $y=x^2$
Beräkna volymen som fås då
a) R roteras runt x-axeln
b) R roteras runt y-axeln

Lösning:



a)



Skivelement med area
$A(x) = \pi x^2 - \pi x^4$

$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}$ volymenheter

b)

Skivelement med area
$A(y) = \pi \sqrt{y}^2 - \pi y^2$

$V = \pi \int_0^1 (y - y^2)\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$ volymenheter.

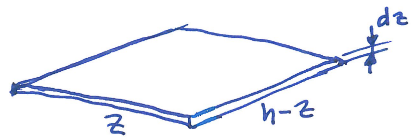
Andra volymräkningar med skivelement

7.2.2

Givet: En kropp har höjd h och tvärsnittet på höjd z är en rektangel med sidor z och h-z.

Sökt: Kroppens volym V

Volymelement på höjd z



$$dV = z\cdot(h-z)\cdot dz$$

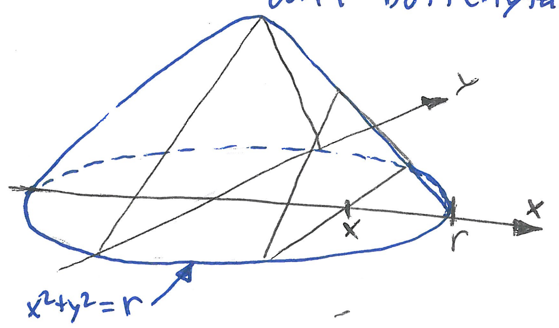
$$V = \int dV = \int_0^h z\cdot(h-z)\,dz = \int_0^h (hz - z^2)\,dz = \left[h\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{6} \text{ volymenheter}$$

7.2. 12

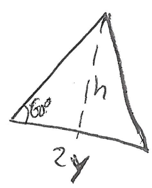
Givet: För en kropp med cirkulär bottenarea med radie r är alla tvärsnitt vinkelräta mot en viss diameter liksidiga trianglar.

Sökt: Kroppens volym

Lösning: Vi placerar x-axeln vinkelrät mot trianglarnas och i bottenytan



Tvärsnittet vid x är en liksidig triangel med sidan $2y = 2\sqrt{r^2-x^2}$ och höjden $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2y$



$$A(x) = \cancel{\frac{2y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}2y}{2}} = \sqrt{3}\,y^2 = \sqrt{3}\,(r^2-x^2)$$

$$dV = \sqrt{3}\,(r^2-x^2)\,dx$$

Eller p g a symmetri $V = 2\sqrt{3}\int_0^r (r^2-x^2)\,dx$

$$V = \sqrt{3}\int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\,dx = \sqrt{3}\left[r^2\cdot x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \sqrt{3}\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}r^3$$

$$V = \frac{4}{\sqrt{3}}r^3 \text{ volymenheter}$$