

Mellan A och B har kurvan  $y = f(x)$  längd

$$ds \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Da  $dx \rightarrow 0$  får vi (mer noggrant med Riemannsumma s. 405)  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  och

Båglängd = längden på kurvan.

Båglängden för kurvan  $y = f(x)$  från  $x = a$  till  $x = b$  är

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

7.3.4 Finn längden  $s$  av kurvan  $y^2 = (x-1)^3$  från  $(1,0)$  till  $(2,1)$

$$y = (x-1)^{3/2} = f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{9x-5} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{9} \frac{(9x-5)^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = \frac{1}{27} (13^{3/2} - 4^{3/2}) =$$

$$= \frac{13^{3/2} - (4^{1/2})^3}{27} = \frac{13^{3/2} - 8}{27} \text{ längdenheter.}$$

7.3.10 Finn längden  $s$  av kurvan  $y = x^2 - \frac{\ln(x)}{8} = f(x)$  från  $x=1$  till  $x=2$

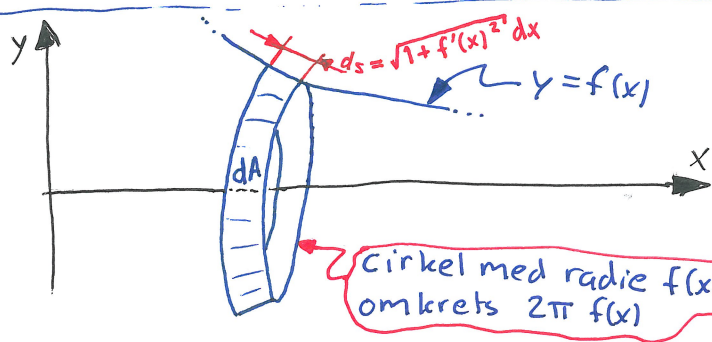
$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x}$$

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + \left(\frac{1}{8x}\right)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + \left(\frac{1}{8x}\right)^2 = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

② Båglängden är

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_1^2 (2x + \frac{1}{8x}) dx = [x^2 + \frac{1}{8} \ln(x)]_1^2 = 4 + \frac{1}{8} \ln(2) - 1 - 0 =$$

$$s = 3 + \frac{1}{8} \ln(2) \text{ längdenheter}$$



Om man roterar en kurva  $y=f(x)$  runt  $x$ -axeln så ger detta en yta som kan beskrivas med areaelement  $dA = 2\pi f(x) \cdot ds = 2\pi f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

För  $x$  sådana att  $f(x)$  är negativ så är radien istället  $|f(x)|$  ovan.

Detta ger

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

### Exempel

Rotera kurvan  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \geq 1$  runt  $x$ -axeln.

a) Räkna ut arean på rotationsytan som detta ger.

b) Räkna ut rotationsvolymen som detta ger

### Lösning

a) Vi har  $y = \frac{1}{x} = f(x)$ .

$$f'(x) = -x^{-2}$$

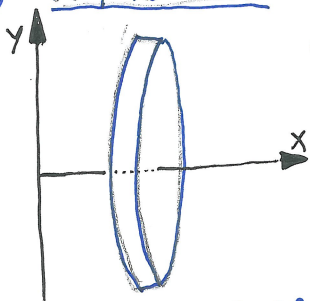
Svar räkna ut, men vi kan ju kolla om den konvergerar.

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \left| \frac{1}{x} \right| \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^R$$

$$= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} (\underbrace{\ln(R)}_{\rightarrow \infty} - 0) = \infty$$

Svar: Oändlig area

b) Volymelement skiva med tjocklek  $dx$ , radie  $\frac{1}{x}$ , tvärsnittsarea  $A(x) = \pi \cdot \frac{1}{x^2}$  och volym  $dV = A(x) dx = \pi \frac{1}{x^2} dx$



Totala volymen blir

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{-2} dx = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^R =$$

$$V = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{R} + \frac{1}{1} \right) = \pi \text{ volymenheter.}$$

3

Om vi fyller volymen med målarfärg så räcker det alltså med  $\infty$  volymenheter, trots att den inneslutande arean (= "färgburkens insida") har oändlig area, så det skulle behövas oändligt mycket målarfärg för att måla den. 😊