

L 35-36 Kurva i parameterform, lutning Adams 8.2-8.3 ①

Kurva i parameterform:  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ , parameter  $t$  i något intervall  $I$ .

Ex 2

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) & (1) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) & (2) \end{cases}$$

Lös ut  $t$  från (1) och sätt in i (2):

$$t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad \text{sätt in i (2):}$$

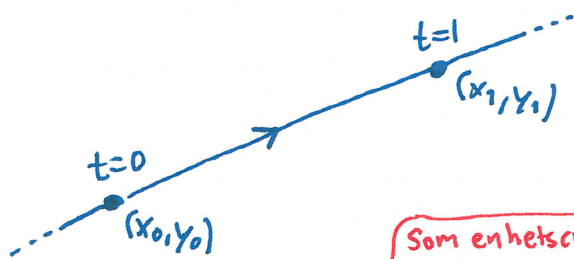
$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (y_1 - y_0) = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{konstant}} x + \underbrace{y_0 - x_0 \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{konstant}}$$

Rät linje!

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

$$t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + x_1 - x_0 = x_1 \\ y = y_0 + y_1 - y_0 = y_1 \end{cases}$$

Kurvan är en rät linje genom  $(x_0, y_0)$  och  $(x_1, y_1)$



Som enhetscirkeln, men skaländring med faktor 5 i x- och y-led.

Ex

$$\begin{cases} x = 5 \cos(\pi t) \\ y = 5 \sin(\pi t) \end{cases}, \quad -\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{4}$$

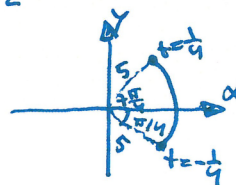
centrum i (0,0) och

Parameterform för del av en cirkel med radie 5, ty

$$x^2 + y^2 = 5^2 \cos^2(\pi t) + 5^2 \sin^2(\pi t) = 5^2 (\underbrace{\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t)}_{=1}) = 5^2$$

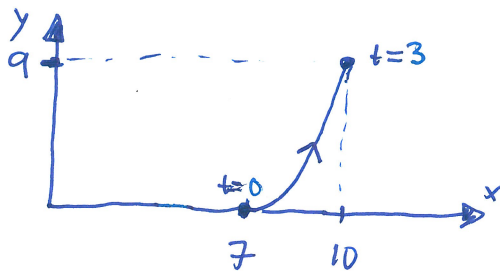
$$t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \cos(-\frac{\pi}{4}) = 5 \cos(\frac{\pi}{4}) = 5 \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 5 \sin(-\frac{\pi}{4}) = -5 \sin(\frac{\pi}{4}) = -5 \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \cos(\frac{\pi}{4}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 5 \sin(\frac{\pi}{4}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



② Ex  $\begin{cases} x = t+7 & (1) \\ y = t^2 & (2) \end{cases}, 0 \leq t \leq 3$

(1)  $\Rightarrow t = x-7$  sätt in i (2):  $y = (x-7)^2$



Derivering

Om  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$  så är  $y = g(t) = g(f^{-1}(x))$  och

Förutsatt att f inverterbar

Kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} g(f^{-1}(x)) = g'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \quad (*)$$

För sista faktorn såg vi i läsperiod 1 att derivering av

$$x = f(f^{-1}(x)) \text{ ger}$$

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

Insättning i (\*) ger att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Detta krävde att f är inverterbar och  $f'(t)$  nollskild, och så är fallet tex för t på ett intervall där  $f'(t)$  är kontinuerlig och  $f'(t) \neq 0$  (dvs f strängt växande alternativt strängt avtagande). Detta ger

Teorem 1 (Avisnitt 6.3)

För en kurva  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ , om  $f'(t) \neq 0$  och  $f'(t)$  är kontinuerlig för t

på ett intervall I, så gäller att  $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ .

På samma sätt: Om  $g'(t) \neq 0$  och  $g'(t)$  kontinuerlig för t

på I så är  $\frac{dx}{dy} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$

8.3.4

Givet: 
$$\begin{cases} x = f(t) = t^3 - 3t \\ y = g(t) = 2t^3 + 3t^2 \end{cases}$$

Sökt: Alla punkter  $(x,y)$  där kurvan har

a) en horisontell tangent (dvs  $\frac{dy}{dx} = 0$ )

b) en vertikal tangent (dvs  $\frac{dx}{dy} = 0$ )

Lösning: 
$$f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1)$$

$$g'(t) = 6t^2 + 6t = 6t(t+1)$$

a) 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{6t(t+1)}{3(t^2-1)} = \frac{6t\cancel{(t+1)}}{3(t-1)\cancel{(t+1)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ för } t=0, \text{ dvs } x = f(0) = 0, y = g(0) = 0$$

SVAR: Horisontell tangent för  $(x,y) = (0,0)$

b) 
$$\frac{dx}{dy} = \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{3(t-1)}{6t}$$

$$\frac{dx}{dy} = 0 \text{ för } t=1, \text{ dvs för } x = f(1) = -2, y = g(1) = 5$$

SVAR: Vertikal tangent för  $(x,y) = (-2,5)$

8.3.12

Givet: 
$$\begin{cases} x = e^{2t} = f(t) \\ y = te^{2t} = g(t) \end{cases}$$

sökt: kurvans lutning i punkten  $t = -2$

Lösning: 
$$f'(t) = 2e^{2t}$$

$$g'(t) = 1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} = (1+2t)e^{2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{(1+2t)e^{2t}}{2e^{2t}}$$

$$\text{För } t = -2 \text{ är kurvans lutning } \frac{dy}{dx} = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

SVAR:  $-\frac{3}{2}$

④ sid 477 i boken:

Tangenten till kurvan  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$  genom punkten

$(f(t_0), g(t_0))$  är linjen

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

8.3.14 Givet:  $\begin{cases} x = t - \cos(t) = f(t) \\ y = 1 - \sin(t) = g(t) \end{cases}$

Sökt: Tangenten genom  $(f(\frac{\pi}{4}), g(\frac{\pi}{4}))$  skriven på parameterform.

Lösning:  $f'(t) = 1 + \sin(t)$  ,  $f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$  ,  $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $g'(t) = -\cos(t)$  ,  $g'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  ,  $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Tangentens ekvation:

$$\begin{cases} x = f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})(t - \frac{\pi}{4}) \\ y = g(\frac{\pi}{4}) + g'(\frac{\pi}{4})(t - \frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$