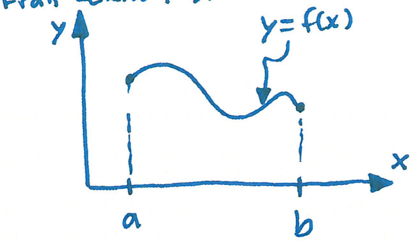
L 37 Mer om båglängd + rotationsyta

(Adams 8.4)

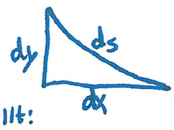
8.5–8.6 utgår 2014

Från Lektion 31:



Beräkna längden på kurvan $y=f(x)$, $a\le x\le b$.

Längdelement:



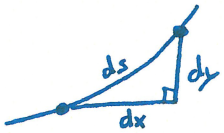
Formellt:

$$ds \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{(1+(\tfrac{dy}{dx})^2)dx^2} = \sqrt{1+f'(x)}\,dx$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)}\,dx$$

Liknande för kurva på parameterform $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t)\end{cases}$ $a\le t\le b$.

Längdelement:



$$ds \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{((\tfrac{dx}{dt})^2+(\tfrac{dy}{dt})^2)dt^2} = \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt$$

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt}$$

8.4.2 Sökt: Längden s på kurvan $\begin{cases} x=1+t^3=f(t) \\ y=1-t^2=g(t)\end{cases}$, $-1\le t\le 2$.

Lösning: $f'(t)=3t^2$

$g'(t)=-2t$

$$s=\int_{-1}^{2}\sqrt{9t^4+4t^2}\,dt = \int_{-1}^{2}\sqrt{9t^2+4}\,|t|\,dt = \int_{-1}^{0}\sqrt{9t^2+4}\,(-t)\,dt+\int_0^2\sqrt{9t^2+4}\,t\,dt=$$

$$=\left[\begin{array}{l} u=9t^2+4 \\ du=18t\,dt \\ t=-1 \Rightarrow u=13 \\ t=0 \Rightarrow u=4 \\ t=2 \Rightarrow u=40\end{array}\right] = \frac{1}{18}\left(-\int_{13}^{4}u^{1/2}\,du+\int_4^{40}u^{1/2}\,du\right)=$$

$$=\frac{1}{18}\left(\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^{13}+\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^{40}\right) = \frac{1}{\cancel{18}_{9}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left(13^{3/2}-4^{3/2}+40^{3/2}-4^{3/2}\right)$$

$$4^{3/2}=(4^{1/2})^3=2^3=8$$

SVAR: $s=\frac{1}{27}(13^{3/2}+40^{3/2}-16)$ längdenheter

8.4.6 Sökt: Längden s på kurvan $\begin{cases} x=\cos(t)+t\sin(t)=f(t) \\ y=\sin(t)-t\cos(t)=g(t)\end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$.

Lösning: $f'(t)=-\sin(t)+1\cdot\sin(t)+t\cos(t)=t\cos(t)$

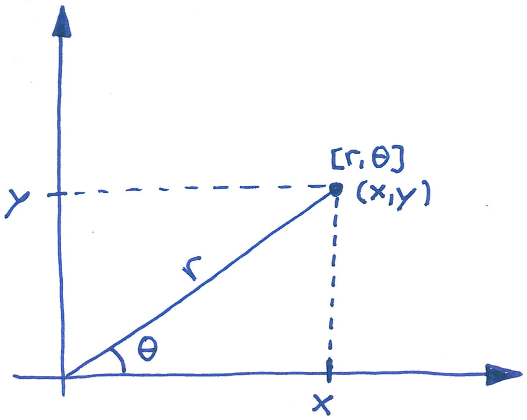
$g'(t)=\cos(t)-1\cdot\cos(t)+t\sin(t)=t\sin(t)$

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{t^2\underbrace{(\cos^2(t)+\sin^2(t))}_{=1}}\,dt = \int_0^{2\pi}t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}=$$

SVAR: $s=\frac{4\pi^2}{2}-0=2\pi^2$ längdenheter.

Tips: I någon av de utdelade uppgifterna kan man ha nytta av formeln $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ omskriven på formen $1+\cos(t)=2\,\frac{1+\cos(t)}{2}=2\cos^2(\frac{t}{2})$

② POLÄRA KOORDINATER $[r,\theta]$



Istället för att ange en punkt i planet med dess koordinater (x,y) i ett rätvinkligt koordinatsystem så kan man beskriva dess position genom att ange dess avstånd r från origo och vinkel θ relativt x-axeln räknad positiv moturs som i figuren. Man kallar r och θ polära koordinater och Adams anger dessa med hakparanteser $[r,\theta]$.

Sam band:

$$\boxed{\begin{array}{l|r} x = r\cos(\theta) & x^2+y^2=r^2 \\ y = r\sin(\theta) & \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{array}}$$

Skriv om från polära till rätvinkliga koordinater:

8.5.2 $\quad r = -\dfrac{2}{\sin(\theta)}$

$r\sin(\theta) = -2$

$y = -2$ horisontell linje

8.5.4 $\quad r = \sin(\theta) + \cos(\theta)$

$r^2 = r\sin(\theta) + r\cos(\theta)$

$x^2+y^2 = y+x$ Kvadratkomplettera!

$$\underbrace{x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}}_{=(x-\frac{1}{2})^2} - \tfrac{1}{4} + \underbrace{y^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}}_{=(y-\frac{1}{2})^2} - \tfrac{1}{4} = 0$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ cirkel med radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och centrum i $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

8.5.12 $\quad r = \dfrac{2}{1+\sin(\theta)}$

$r + \underbrace{r\sin(\theta)}_{y} = 2$

$r = 2-y$

$r^2 = (2-y)^2$

$x^2 + \cancel{y^2} = 4 - 4y + \cancel{y^2}$

$y = \dfrac{4-x^2}{4}$ parabel

För att rita funktionskurva till ekvation $r = f(\theta)$ kan det underlätta att först räkna ut för vilka vinklar θ som r har nollställen och lokala max/min.

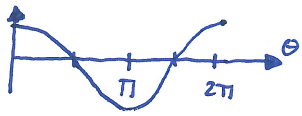
Exempel 4

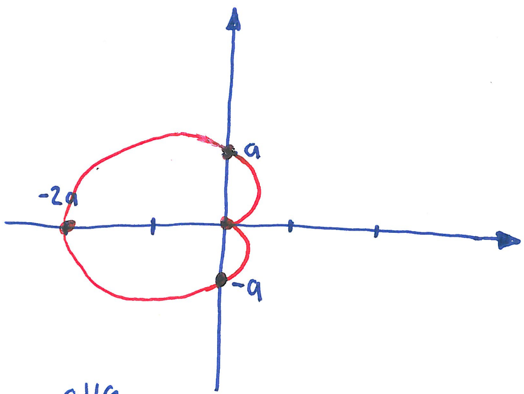
Skissa upp funktionskurvan (= polärt diagram = polar graph)

$$r = a(1-\cos(\theta)), \qquad a>0.$$

2π-periodisk, så vi kan nöja oss med att undersöka då $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	0	a	$2a$ max	a	0





Ex Räkna ut alla skärningspunkter mellan kurvorna

$r = \cos(\theta)$ och $\underbrace{r = 1-\cos(\theta)}$ (*)

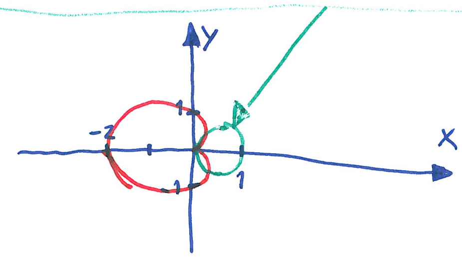
Samma som ovan för specialfallet $a=1$.

$$r^2 \overset{\Updownarrow}{=} r\cos(\theta)$$

$$x^2+y^2 = x$$

$$\underbrace{x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}}_{=(x-\frac{1}{2})^2} - \tfrac{1}{4} + y^2 = 0$$

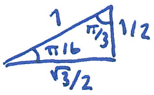
$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ cirkel med radie $\frac{1}{2}$ och centrum i $(\frac{1}{2}, 0)$



Båda går genom origo, så en skärningspunkt är origo. Ser ut att finnas två till. Dessa får vi genom att sätta högerleden lika i (*):

$$\cos(\theta) = 1 - \cos(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$2\cos(\theta) = 1$$

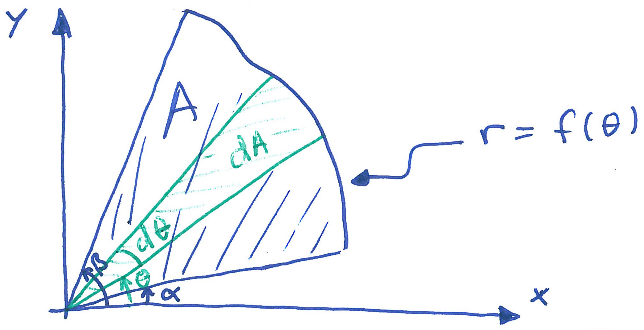


$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ För båda kurvorna är då $r = \cos(\pm\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

Svar: Origo och punkterna med polära koordinater $[r, \theta] = [\frac{1}{2}, \pm\frac{\pi}{3}]$

Area i polära koordinater

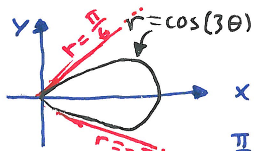


$$dA = \frac{d\theta}{2\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} r^2 = \frac{1}{2} f(\theta)^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 \, d\theta$$

Ex Beräkna arean av $r = \cos(3\theta)$, $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$

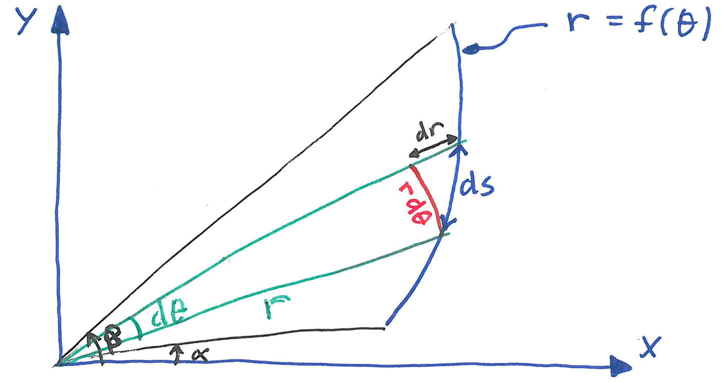
θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$
r	1 max	0



$$A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos(6\theta)}{2} \, d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{6}\sin(6\theta)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{12} \text{ areaenheter}$$

Båglängd för polär kurva



$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta$$

Båglängd: $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta$

8.6.12

Beräkna längden på kurvan $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

$f(\theta) = \theta^2$

$f'(\theta) = 2\theta$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{4\theta^2 + \theta^4}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \theta\sqrt{4+\theta^2}\, 2d\theta = \begin{bmatrix} u = 4+\theta^2 \\ du = 2\theta d\theta \\ \theta = 0 \Leftrightarrow u = 4 \\ \theta = \pi \Leftrightarrow u = 4+\pi^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_4^{4+\pi^2} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^{4+\pi^2} = \frac{1}{3}\left((4+\pi^2)^{3/2} - \underbrace{4^{3/2}}_{=(4^{1/2})^3 = 8}\right)$$

SVAR: $s = \frac{1}{3}\left((4+\pi^2)^{3/2} - 8\right)$ längdenheter