Tentamen i: **Linjär algebra och integralkalkyl**

Ämneskod	M0030M

Tentamensdatum	2019-01-15
Skrivtid	09.00-14.00

1

Totala antalet uppgifter: 6

Lärare: Thomas Strömberg

Jourhavande lärare: Thomas Strömberg **Tel:** 072-5393292

1. Låt L beteckna skärningslinjen mellan planen

$$\Pi_1: x - y - 5z = 1 \quad \text{och} \quad \Pi_2: 2x - 3y - 8z = 8.$$

a) Ange en parameterframställning av L. (1p)

b) I vilken punkt skär L planet $\Pi_3: x + y - z = 5$? (1p)

c) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn vektor- eller skalärprojektion?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

på L. (2p)

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -8 & 8 \end{array}\right) \underset{(2)-2\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{\cdot(-1)}{\overset{(1)-(2)}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \end{array}$$

$z = t$ (fri variabel)

$y = 2z - 6 = 2t - 6$

$x = 7z - 5 = 7t - 5$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\bar{v}} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

b) (1) insatt i $x + y - z = 5$ ger

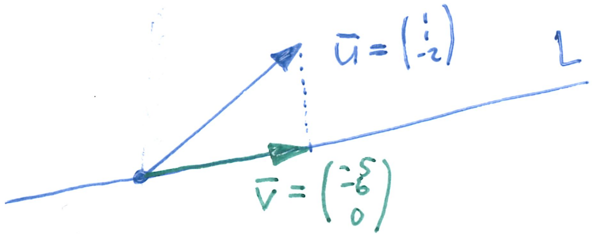
$$-5 + 7t - 6 + 2t - t = 5$$

$$8t = 5 + 11$$

$$8t = 16$$

$$t = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)



$$|\bar{v}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

$$P_{\bar{v}}\bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2}\bar{v} = \frac{-5 - 6 + 0}{61}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{11}{61}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

2. Det finns ett värde på a för vilket vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$$

är linjärt beroende.

a) Finn detta värde på a. (2p)

b) Betrakta det linjära höljet $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ för det värde på a som du funnit i a). I detta fall består H av alla vektorer som är parallella med ett visst plan genom origo. Ange detta plans ekvation. (3p)

a) $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ är linjärt beroende om och endast om

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 4 & a \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -6a - 8 + 3a + 4 + 12 - 12 = -3a - 4$$

$$a = -\frac{4}{3}$$

b) Punkt i planet: $(0,0,0)$

Normalvektor till planet: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-12 \\ 2-4 \\ -6-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

<u>SVAR:</u> $0x - 2y - 3z = 0$

3. a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = \sin^2 x$ för $0 \leq x \leq \pi/2$. (2p)

b) Beräkna integralen (2p)

$$\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x}\, dx.$$

a) $$\int_0^{\pi/2} (\sin(x) - \sin^2(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx =$$

$$= \left[-\cos(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 - \frac{\pi}{4} + 0 - (-1 - 0 + 0) = \underline{\underline{1 - \frac{\pi}{4}}}$$

b) $$\int_1^4 \left(\frac{2}{x} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left[2\ln(|x|) + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right]_1^4 = 2\left(\ln(4) + \sqrt{4} - (\ln(1)+1)\right) =$$

$$= 2(\ln(4)+1) = \underline{\underline{4\ln(2) + 2}}$$

4. a) Beräkna integralen (2p)

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx.$$

b) Bestäm (3p)

$$\int \frac{x^2-x+8}{x^3+4x}\,dx.$$

Partiell integration

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,e^{2x}\,dx = \left[(x+1)\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x}\,dx =$

$= \left(e^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 1\right) - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 dx = e^2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\left(e^2-1\right) =$

$= \tfrac{3}{4}e^2 - \tfrac{1}{4} = \underline{\underline{\dfrac{3e^2-1}{4}}}$

b) $\dfrac{x^2-x+8}{x^3+4x} = \dfrac{x^2-x+8}{x(x^2+4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} = \dfrac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x(x^2+4)}$

$= \dfrac{\underbrace{(A+B)}_{=1}x^2 + \underbrace{C}_{=-1}x + \underbrace{4A}_{=8}}{x(x^2+2)} \Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ C=-1 \\ B=1-A=-1 \end{array}$

$I = \displaystyle\int \frac{x^2-x+8}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{2}{x} - \frac{x+1}{x^2+4}\,dx = 2\ln(|x|) - I_1 - I_2 = \ln(x^2) - I_1 - I_2$

där

"Baklängesderivering" eller via variabelbyte $u = x^2+2$

$I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C_1$

$I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1\cdot 2}{4}\int \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \frac{x}{2} \\ du = \frac{1}{2}dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du =$

$= \tfrac{1}{2}\arctan(u) + C_2 = \tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{x}{2}\right) + C_2$

SVAR: $\ln(x^2) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{x}{2}\right) + C$

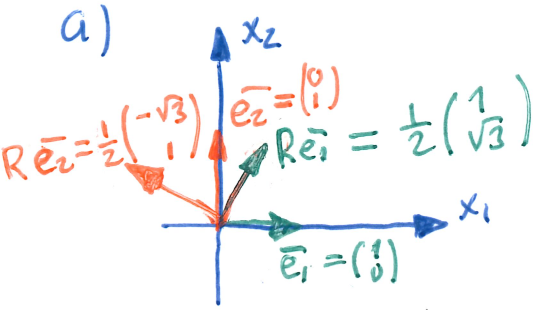
4

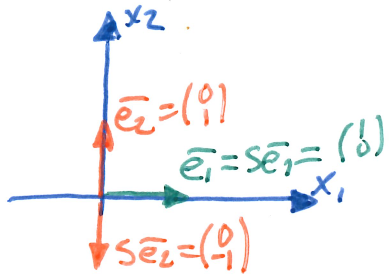
5. a) Låt T vara den sammansatta linjära avbildning som innebär att vektorer i $\mathbb{R}^2$ först roteras med vinkeln $\pi/3$ moturs och sedan speglas i x_1-axeln. (Med andra ord är $T = S \circ R$ där R betecknar moturs rotation med vinkeln $\pi/3$ medan S betecknar spegling i x_1-axeln.) Bestäm matrisen för T. (3p)

b) Bestäm matrisen för den linjära avbildning som innebär att rummets vektorer speglas i den räta linjen (3p)

$$L: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty.$$

a)



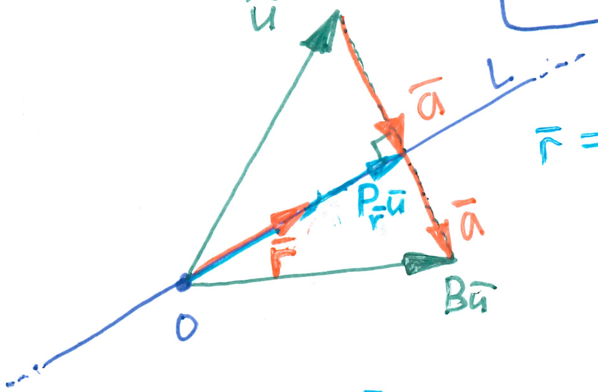


Avbildningsmatriser: $A_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$

$A_S = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\boxed{A_T = A_S A_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}}$$

b) Kalla avbildningen B



$\bar{r} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad |\bar{r}| = \sqrt{6}$

$$P_{\bar{r}}\bar{u} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{r}}{|\bar{r}|^2}\,\bar{r}$$

$$\bar{a} = P_{\bar{r}}\bar{u} - \bar{u}$$

$$B\bar{u} = \bar{u} + 2\bar{a} = \bar{u} + 2(P_{\bar{r}}\bar{u} - \bar{u}) = 2P_{\bar{r}}\bar{u} - \bar{u}$$

$\underline{\bar{u} = \bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$: $\quad P_{\bar{r}}\bar{e}_1 = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$B\bar{e}_1 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4-3\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$\underline{\bar{u} = \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$: $\quad P_{\bar{r}}\bar{e}_2 = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$B\bar{e}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1-3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$\bar{u} = \bar{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: $\quad P_F\bar{e}_3 = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$B\bar{e}_3 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1-3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

SVAR: Avbildningsmatris $A_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}$

6. a) Låt Ω beteckna området som begränsas av kurvan $y = \ln x$, x-axeln och linjen $x = e$. När Ω roterar kring den lodräta linjen $x = 1$ genereras en rotationskropp. Beräkna volymen av denna rotationskropp. (3p)

b) Om man låter den parameterframställda kurvan

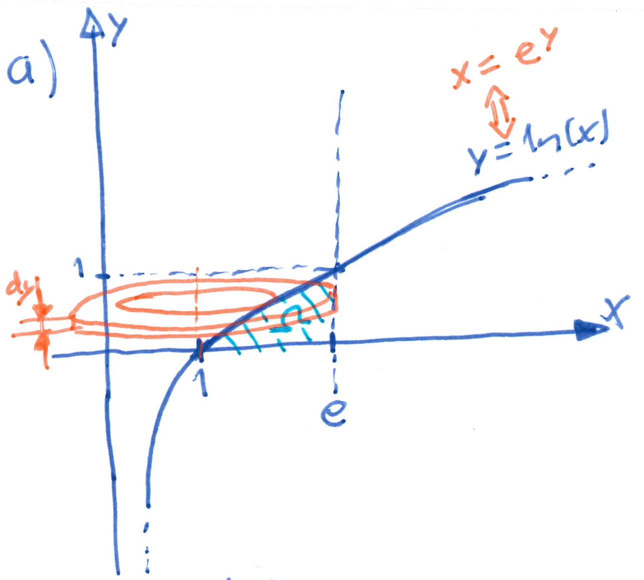
$$\begin{cases} x = \cos^3 t = f(t) \\ y = \sin^3 t = g(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

rotera ett varv kring x-axeln bildas en rotationsyta. Beräkna rotationsytans area. (3p)

$\Rightarrow$ $f'(t) = -3\cos^2(t)\sin(t)$

$g'(t) = 3\sin^2(t)\cos(t)$

a)



Skivelement på "höjden y":

Innerradie: $e^y - 1$

Ytterradie $e - 1$

Tvärsnittsarea: $A(y) = \pi(e-1)^2 - \pi(e^y-1)^2$

Tjocklek: dy

Volym $dV = A(y)\,dy = \pi\left((e-1)^2 - (e^y-1)^2\right)dy$

$= \pi\left((e-1)^2 - e^{2y} + 2e^y - 1\right)dy =$

$= \pi\left(e^2 - 2e - e^{2y} + 2e^y\right)dy$

Total volym:

$$V = \int_{y=0}^{y=1} dV = \pi\int_0^1 \left(e^2 - 2e - e^{2y} + 2e^y\right)dy =$$

$$= \pi\left[(e^2-2e)y - \frac{1}{2}e^{2y} + 2e^y\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(e^2 - \cancel{2e} - \frac{1}{2}e^2 + \cancel{2e} - \left(0 - \frac{1}{2} + 2\right)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\right) = \pi\,\frac{e^2-3}{2} \text{ volymenheter}$$

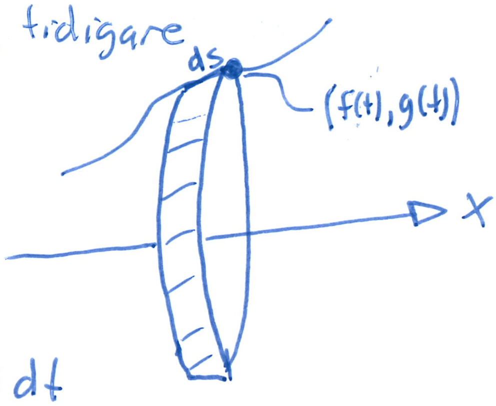
6 b) Vi har $x^{2/3} + y^{2/3} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

Alternativt kan vi konstatera att för $0 < t < \frac{\pi}{2}$ är $f'(t) < 0$, $g'(t) > 0$ och $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < 0$ så y är en avtagande funktion av x.

$$y^{\frac{2}{3}} = 1 - x^{2/3}$$

$$y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

För $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ är $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och y är en funktion av x, så rotationsytan kan räknas ut ungefär som tidigare genom en uppdelning i areaelement enligt figuren. Bandets bredd är



$$ds = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)}\, dt$$

$$= \sqrt{9\cos^2(t)\sin^2(t)\underbrace{(\cos^2(t)+\sin^2(t))}_{=1}}\, dt = 3\cos(t)\sin(t)\, dt$$

Bandets omkrets är $2\pi|g(t)| = 2\pi|\underbrace{\sin^3(t)}_{\geq 0 \text{ då } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}}| = 2\pi \sin^3(t)$, och arean är

$$dA = 2\pi \sin^3(t) \cdot 3\cos(t)\sin(t)\,dt = 6\pi \sin^4(t)\cos(t)\,dt$$

Total rotationsyta blir

$$A = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} dA = 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)\, dt = \left[\begin{array}{l} u = \sin(t) \\ du = \cos(t)\,dt \\ t=0 \Rightarrow u=0 \\ t=\pi/2 \Rightarrow u=1 \end{array}\right] =$$

$$= 6\pi \int_0^1 u^4\, du = 6\pi \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = 6\pi\left(\frac{1}{5} - 0\right) = \underline{\underline{\frac{6\pi}{5} \text{ areaenheter}}}$$

Tentamen i: Linjär algebra och integralkalkyl	Ämneskod	M 0030M
	Tentamensdatum	2019-03-21
Totala antalet uppgifter: 6	Skrivtid	09.00-14.00
Lärare: Thomas Strömberg		

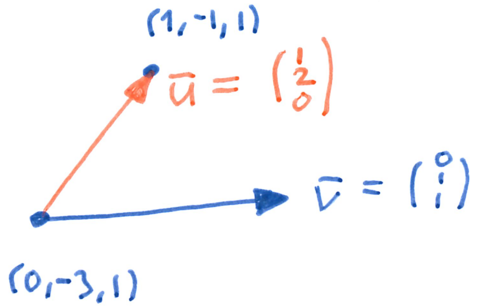
1. Planet Π innehåller punkterna $(0,-3,1)$ och $(1,-1,1)$ och är parallellt med vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Ange en ekvation för Π. (3p)

b) Beräkna avståndet från punkten $(1,0,-1)$ till Π. (2p)

a)



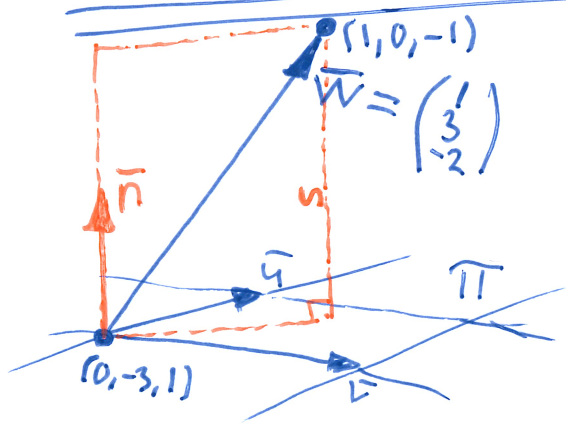
$\bar{u}$ och $\bar{v}$ är två vektorer parallella med planet, så en normalvektor till planet är

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Planet har därmed ekvationen

$$2(x-1) - (y+1) + (z-1) = 0$$

b)



Det sökta avståndet är avståndet s i figuren, vilket fås från skalärprojektion

$$s = \left| \frac{\bar{w} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \left| \frac{2-3-2}{\sqrt{4+1+1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{6}} \text{ längdenheter}$$

$$\left(= \sqrt{\frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

8

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & a+5 \end{bmatrix}$$

a) Beräkna det A. (2p)
b) För vilka värden på a är A inverterbar? (1p)
c) Invertera A för $a = 0$ (om möjligt). (2p)

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} a-2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & a+5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a+5 \end{vmatrix} + 0 - 3 \begin{vmatrix} a-2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= -2(a+5+2) - 3(-(a-2) - 5)$

$= -2a - 14 \quad + 3a + 9 = a - 5$

SVAR: $\det(A) = a-5$

b) A är inverterbar då $a \neq 5$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)+2\cdot(1) \\ (3)-2\cdot(1) \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{2\cdot(3)-3\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -10 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 5 \\ \end{array} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -10 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)+(3) \\ (2)-3\cdot(3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & 14 & 40 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -10 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} /5 \\ /10 \\ /5 \end{array} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{20}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{10}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 7 & 20 & -3 \\ -3 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

3. a) Beräkna arean av området mellan kurvan $y = \sin^3 x \cos^2 x$ och x-axeln för $0 \leq x \leq \pi/2$. (3p)

b) Beräkna integralen (2p)

$$I = \int_2^4 \frac{1}{x \ln x}\, dx.$$

$$a)\ A = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos^2(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)(1-\cos^2(x))\cos^2(x)\,dx = \begin{bmatrix} u=\cos(x) \\ du=-\sin(x)\,dx \\ x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_1^0 (1-u^2)u^2\,du = \int_0^1 (u^2-u^4)\,du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5\cdot 1}{5\cdot 3} - \frac{1\cdot 3}{5\cdot 3} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} \text{ areaenheter}$$

$$b)\ I = \int_2^4 \frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln(x) \\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ x=2 \Rightarrow u=\ln(2) \\ x=4 \Rightarrow u=\ln(4) \end{bmatrix} = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{1}{u}\,du =$$

$$= \Big[\ln(|u|)\Big]_{\ln(2)}^{\ln(4)} = \ln(\ln(4)) - \ln(\ln(2))$$

$$= \ln\left(\frac{\ln(4)}{\ln(2)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(2^2)}{\ln(2)}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2\ln(2)}{\ln(2)}\right) = \ln(2)$$

4. a) Beräkna integralen (2p)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

b) Låt det område som begränsas av x-axeln, y-axeln, kurvan $y = e^x$ samt linjen $x = 1$ rotera ett varv kring y-axeln. Beräkna volymen av den genererade rotationskroppen. (3p)

a) x^2+4x+5 har inga reellvärda rötter ty pq-formeln ger $x = -2 \pm \sqrt{4-5}$.

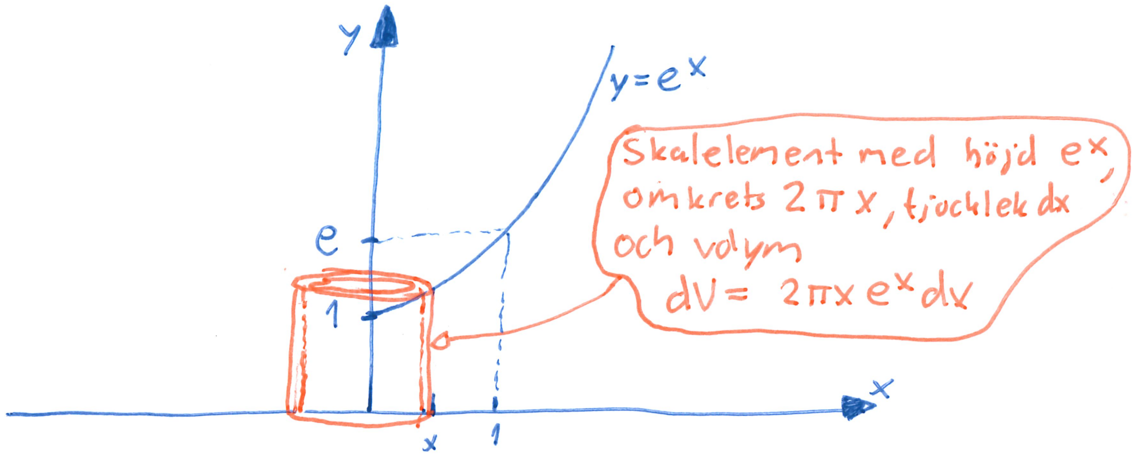
Kvadratkomplettering ger att

$$x^2+4x+5 = x^2 + 2\cdot 2x + 2^2 + 1 = (x+2)^2+1$$

Alltså är

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} u=x+2 \\ du=dx \\ x=-2 \Rightarrow u=0 \\ x=-1 \Rightarrow u=1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

10 b)



Total volym fås med partiell integration:

$$V = 2\pi \int_0^1 x e^x dx = 2\pi \left([x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) =$$

$$= 2\pi [x e^x - e^x]_0^1 = 2\pi (e - e - (0-1)) = \underline{\underline{2\pi \text{ volymenheter}}}$$

5. Låt T vara den linjära avbildning som innebär att vektorer i $\mathbb{R}^2$ först roteras med vinkeln $\pi/6$ moturs och sedan speglas i linjen $x_1 = x_2$.

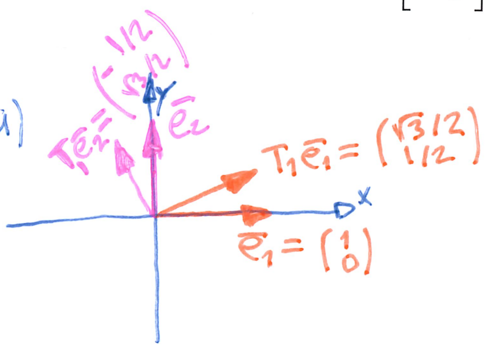
a) Bestäm avbildningens matris. (3p)

b) Bestäm den vektor $\mathbf{x}$ som avbildas på

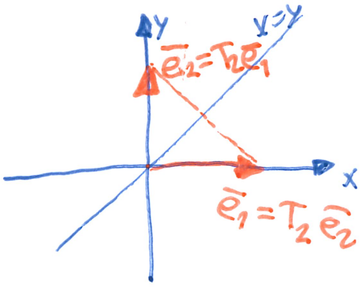
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(2p)

a)



$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$



$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sökt: Avbildningsmatrisen för $T_2 \circ T_1$, dvs

$$A = A_2 A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$A\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2A\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ löses snabbast med Gausseliminering.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \sqrt{3} & -2 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{(2)+\sqrt{3}\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \sqrt{3} & -2 \\ 0 & 4 & 4-2\sqrt{3} \end{array}\right)$$

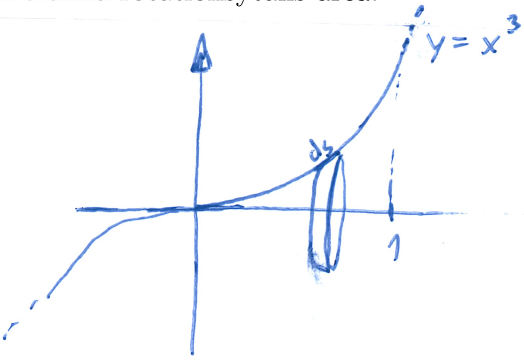
$$4x_2 = 4-2\sqrt{3} \Rightarrow x_2 = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-x_1 + \sqrt{3}\,x_2 = -2$$

$$x_1 = 2+\sqrt{3}\,x_2 = 2+\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2+\sqrt{3}-\frac{3}{2} = \sqrt{3}+\frac{1}{2}$$

SVAR: $\bar{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

6. När kurvan $y = x^3$, $0 \le x \le 1$ roterar kring x-axeln bildas en rotationsyta. Beräkna rotationsytans area. (5p)



$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Areaelement:

Band med bredd ds, omkrets $2\pi x^3$

och area $dA = 2\pi x^3 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$$dA = 2\pi x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx$$

Rotationsytans area blir då:

$$A = \frac{2\pi}{36} \int_0^1 36x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 1+9x^4 \\ du = 36x^3\,dx \\ x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=10 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_1^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{18}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^{10} = \frac{2\pi}{3\cdot 18}\left[u^{3/2}\right]_1^{10} =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2}-1\right)$$